Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 04**

Abgabe: Fr., 17.11.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 21.11.2023

---

1 (*) Wasserstoffatom im elektrischen Feld (4 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}(t)$, das entlang der z-Richtung liegt. Die Amplitude betrage $E(t) = A\tau/(\tau^2 + t^2)$, wobei A und τ vorgegebene Konstanten sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P für den Übergang des Elektrons aus dem Grundzustand (bei $t \to -\infty$) in den $2P$-Zustand (bei $t \to +\infty$).

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega| a} \,.$$

Solution

The electric filed in the z-direction implies the Hamiltonian

$$H = H_0 + V(t) = H_0 + E(t)\vec{z}\,.$$

By using first-order perturbation theory, we have

$$\begin{aligned} A_{|m\rangle\to|n\rangle}(t) &= \delta_{mn} + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i(E_n-E_m)t'/\hbar}\,\langle n|V(t')|m\rangle \\ &= 0|_{m\neq n} + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega_{nm}t'/\hbar}\frac{A\tau}{\tau^2+t^2}\,\langle n|\vec{z}|m\rangle\ , \end{aligned}$$

where $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$. Using the integration formula in the hint, we have

$$A_{|m\rangle\to|n\rangle}(t) = \frac{A\pi}{i\hbar}e^{-|\omega_{nm}|\tau}\,\langle n|\vec{z}|m\rangle\ .$$

Now take $|m\rangle = |1s\rangle$ and $|n\rangle = |2p\rangle$, we have the probability

$$P_{1s\to 2p} = |A(t)|^2 = \frac{A^2\pi^2}{\hbar^2}e^{-2|\omega|\tau}|\,\langle 2p|\vec{z}|1s\rangle\,|^2\,,$$

where $|\omega|_{1s\to 2p} = \left|\frac{E_2-E_1}{\hbar}\right| = \frac{3}{4}\frac{E_1}{\hbar}$. Then we use the following wave functions for the states

$$\begin{aligned} |1s\rangle:\quad &\psi_{100}(\vec{r}) = R_{10}(r)Y_{00}(0,\phi) = \frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ |2p, l=1\rangle:\quad &\psi_{21m}(\vec{r}) = R_{21}(r)Y_{1m}(0,\phi)\,, \end{aligned}$$

where $m = -1, 0, 1$ and Bohr radius a_0. Here we only need $\psi_{210}(\vec{r})$ since $Y_{1,\pm1}(0,\phi) \propto e^{\pm i\phi}$ and $\int_0^{2\pi} d\phi e^{\pm i\phi} = 0$, then we have

$$\psi_{210} = R_{21}(r)Y_{10}(0,\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/(2a_0)}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,.$$

Now parametrise $\vec{z} = \kappa\cos\theta$, we have

$$\begin{aligned} \langle 2p|\vec{z}|1s\rangle &= \frac{1}{4\pi}\frac{a_0}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{a_0^4}\int_0^\infty r^3 dr\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-3/2(r/a_0)}\right]\int_{-1}^{1}\cos^2\theta d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\phi \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}\frac{2^8}{3^5}\,, \end{aligned}$$

and the probability

$$P_{1s\to 2p} = \frac{A^2\pi^2}{\hbar^2}e^{-2\omega\tau}a_0^2\frac{2^{15}}{3^{10}} \simeq 0.55\frac{A^2\pi^2}{\hbar^2}e^{-2\omega\tau}a_0^2$$

2 (*) Lebensdauer für Dipolübergang (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, wobei sich das Elektron in einem $2P$-Zustand mit $m = 0, +1$ oder -1 befindet. Mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung erhält man für die Übergangsrate in den $1S$-Zustand (in SI-Einheiten)

$$\frac{d\Gamma_{2P\to 1S,\vec{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2}\omega^3 |\vec{d}_{2P,1S} \cdot \vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k}\lambda}|^2 ,$$

wobei $\vec{k}$ und λ Wellenzahl und Polarisation des Photons sind und sich ω aus der Energiedifferenz zwischen dem $2P$- und $1S$-Niveau ergibt.

1. Summieren Sie über beide Polarisationszustände und integrieren Sie über den Raumwinkel $d\Omega$ (des Vektors $\vec{k}$), um die Lebensdauer in Abhängigkeit vom Betrag des Dipolmatrixelements $|\vec{d}_{2P,1S}|$ zu bekommen.

Solution

We have

$$\Gamma_{2p\to 1s} = \sum_{\lambda} \int d\Omega \frac{d\Gamma_{2p\to 1s,\vec{k},\lambda}}{d\Omega} \; , , \quad \lambda = 1, 2 .$$

Now parametrise the angle with

$$\vec{d}_{1p,1s} \cdot \vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},1} = \cos\theta_1 |\vec{d}_{1p,1s}| , \qquad \vec{d}_{2p,1s} \cdot \vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},2} = \cos\theta_2 |\vec{d}_{2p,1s}| ,$$

then we have

$$\Gamma_{2p\to 1s} = \int d\Omega \frac{\alpha}{2\pi c^2}\omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \big(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2\big) .$$

Now rewrite the $\cos\theta_i$ in the spherical coordinate

$$\cos\theta_1 = \sin\theta\cos\phi , \qquad \cos\theta_2 = \sin\theta\sin\phi ,$$

and we have

$$\int d\Omega \big(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2\big) = \int_{-1}^{1} d\cos\theta \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \frac{8\pi}{3} .$$

Hence we have

$$\Gamma_{2p\to 1s} = \frac{4\alpha}{3c^2}\omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 ,$$

and the lifetime is $\tau = 1/\Gamma_{2p\to 1s}$.

2. Berechnen Sie das Dipolmatrixelement $\vec{d}_{2P,1S}$ und drücken Sie die Lebensdauer τ durch α, m_e, c und $\hbar$ aus.

Solution

$$\vec{d}_{2p\to 1s} = \langle 1s|\vec{R}|2p\rangle = \int r^2 dr \int d\Omega \psi_{1s}^*(\vec{r})\psi_{2p}(\vec{r})\vec{r}\,.$$

We use

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = R_{10}(r)Y_{00}(0,\phi)\,,\quad \psi_{2s}(\vec{r}) = R_{20}(r)Y_{1m}(0,\phi)\,,\quad \vec{r} = r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\,,$$

and

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,,\quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,,\quad Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\,,\quad Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}\,,$$

then we have

$$\begin{aligned}\sin\theta\cos\phi &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\big(Y_{1,-1}-Y_{11}\big)\,,\\ \sin\theta\sin\phi &= -\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\big(Y_{1,-1}+Y_{11}\big)\,,\quad \cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}\,.\end{aligned}$$

Hence we have

$$R_{10} = \frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-\frac{r}{a_0}}\,,\quad R_{21} = \frac{1}{(24a_0^3)^{1/2}}\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}\,,$$

yielding

$$\begin{aligned}\vec{d}_{2p,1s} &= \int_0^\infty dr\, r^4\frac{1}{a_0^4\sqrt{6}}e^{-\frac{3r}{2a_0}}\int d\Omega\frac{1}{\sqrt{4\pi}}Y_{1m}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}(Y_{1,-1}-Y_{11})\\ -\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}(Y_{1,-1}+Y_{11})\\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{a_0^4\sqrt{6}}\frac{256a_0^5}{81}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\delta_{m,-1}-\delta_{m,1})\\ -\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{3}}(\delta_{m,-1}+\delta_{m,1})\\ \sqrt{\frac{1}{3}}\delta_{m,0}\end{pmatrix}\,.\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}|\vec{d}_{2p,1s}|^2 &= \frac{a_0^2}{6}\left(\frac{256}{81}\right)^2\left[\frac{1}{6}(\delta m,-1+\delta_{m,1})+\frac{1}{6}(\delta m,-1+\delta_{m,1})+\frac{1}{3}\delta_{m,0}\right]\\ &= \frac{a_0^2 2^{15}}{3^{10}}\left(\delta_{m,1}+\delta_{m,-1}+\delta_{m,0}\right)\,.\end{aligned}$$

Now with $\omega = \frac{E_{2p}-E_{1s}}{\hbar} = \frac{\alpha^2 mc^2}{\hbar}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha^2 mc^2}{\hbar}\frac{3}{8}$ and $a_0 = \frac{\hbar}{\alpha mc}$, we can compute the life time

$$\tau = \frac{\hbar}{\alpha^5 mc^2}\frac{3^8}{2^8}$$

3. Werten Sie τ numerisch aus. Numerische Werte für die Konstanten finden Sie auf der Webseite `https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/contents_sports.html`

Solution

$$\tau = 1.595 \times 10^{-9}\mathrm{s}$$

---

3 Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes

Der Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes in einem endlichen Volumen V ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{rad}} &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathrm{d}^3 r \left(\frac{\vec{E}^{\,2}}{c^2} + \vec{B}^{\,2} \right) \\ &= \frac{V \epsilon_0 c^2}{2} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{c^2} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 \right) , \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$ aus Gl. (2) (siehe unten) extrahiert werden kann. Zeigen Sie, dass Gl. (1) in folgender Form geschrieben werden kann

$$H_{\mathrm{rad}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar c k \left(\vec{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} \vec{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) ,$$

wobei $\vec{k}$ den Wellenvektor und λ die Polarization bezeichnet. Das Vektorpotential ist dabei gegeben durch (mit $\omega_k = kc$)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\varepsilon_0}} \left(a_{\vec{k},\lambda} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} \vec{\varepsilon}^{\,\star}_{\vec{k},\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) , \tag{2}$$

wobei $a_{\vec{k},\lambda}$ und $a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind. Es gilt

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} , \quad [a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}] = 0 , \quad \text{und} \quad [a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}] = 0 .$$

Hinweis: O.B.d.A. kann man Polarisationsvektoren wählen, so dass gilt $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} = \vec{\varepsilon}_{-\vec{k},\lambda}$.

Solution

Here we need to employ a trick of integration

$$\int d^3r \left(Xe^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + Ye^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = \int d^3r \,(X+Y)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} ,$$

since we have the freedom to change the integration variables in $\vec{r}$. Then we can use this trick and compare eq. (2) and $\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ to obtain

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left(a_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}e^{-i\omega_k t} + a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}^{\,\star}_{\vec{k},\lambda}e^{i\omega_k t}\right) .$$

We can employ the properties of polarisation vectors ($\lambda = 1, 2$)

$$\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0\,, \quad \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\,, \quad |\vec{\varepsilon}_i| = 1\,, \quad \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}_2\,, \quad \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\varepsilon}_2 = -\vec{\varepsilon}_1\,,$$

and obtain the followings

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) &= \sum_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left(a_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}(-i\omega_k)e^{-i\omega_k t} + a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}^{\,\star}_{\vec{k},\lambda}(i\omega_k)e^{i\omega_k t}\right) \\
\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \Bigg[\left(a_{\vec{k},1}|\vec{k}|\vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}e^{-i\omega_k t} + a^\dagger_{\vec{k},1}|\vec{k}|\vec{\varepsilon}^{\,\star}_{\vec{k},2}e^{i\omega_k t}\right) \\
&\qquad - \left(a_{\vec{k},2}|\vec{k}|\vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}e^{-i\omega_k t} + a^\dagger_{\vec{k},2}|\vec{k}|\vec{\varepsilon}^{\,\star}_{\vec{k},1}e^{i\omega_k t}\right) \Bigg] .
\end{aligned}$$

With $\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$ and $|\vec{\varepsilon}_i| = 1$, we further have

$$\begin{aligned}
|\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}|^2 &= \sum_\lambda \frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0} \left[\omega_k^2 \left(a_{\vec{k},\lambda}a^\dagger_{\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{\vec{k},\lambda}a_{\vec{k},\lambda}\right) + a^2_{\vec{k},\lambda}(-\omega_k^2)e^{-2i\omega_k t} + \left(a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\right)^2 (-\omega_k^2)e^{2i\omega_k t}\right] \\
|\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}|^2 &= \sum_\lambda \frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0} \left[k^2 \left(a_{\vec{k},\lambda}a^\dagger_{\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{\vec{k},\lambda}a_{\vec{k},\lambda}\right) + a^2_{\vec{k},\lambda}k^2e^{-2i\omega_k t} + \left(a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\right)^2 k^2e^{2i\omega_k t}\right] .
\end{aligned}$$

Now use $\omega_k^2 = c^2k^2$ and $[a_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}$, we arrive

$$\frac{1}{c^2}|\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 = \frac{2\hbar}{cV\epsilon_0} \sum_\lambda k \left(a^\dagger_{\vec{k},\lambda}a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right) ,$$

and finally

$$H_{\text{rad}} = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} k \left(a^\dagger_{\vec{k},\lambda}a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$