Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 05**

Abgabe: Fr., 24.11.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 28.11.2023

---

1 Eichinvarianz

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines geladenen Teilchens im Magnetfeld. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung invartiant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned}\vec{A} \to \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda\,,\\ \Phi \to \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda\,,\\ \Psi \to \Psi' &= \Psi\, e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\,,\end{aligned}$$

wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. $\vec{A}$, Φ und Λ sind Funktionen von $\vec{r}$ und t. Q bezeichnet die elektrische Ladung des Teilchens.

---

2 (*) Lorentz-Transformation des elektromagnetischen Feldes (4 Punkte)

(a) Leiten Sie aus dem Transformationsverhalten des Feldstärketensors

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^{\ \rho}\,\Lambda_\nu^{\ \sigma}\,F_{\rho\sigma}$$

das Transformationsverhalten der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unter einer Lorentz-Transformation entlang der z-Achse her.

(b) Berechnen Sie die Komponenten des dualen Feldstärketensors

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\,.$$

(c) Berechnen Sie die Größen $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$. Wie verhalten sich diese unter Lorentz-Transformationen?

---

3 Levi-Civita-Tensor und Lorentz-Transformation

(a) Zeigen Sie, dass der Levi-Civita-Tensor ein Pseudotensor vierter Stufe unter Lorentz-Transformation ist, *d.h.* dass gilt

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\; \det(\Lambda)\,\Lambda^{\alpha}_{\ \alpha'}\,\Lambda^{\beta}_{\ \beta'}\,\Lambda^{\gamma}_{\ \gamma'}\,\Lambda^{\delta}_{\ \delta'}\;\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Ausdruck in der Mitte die Definition des Levi-Civita-Tensors erfüllt.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$, wobei $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta$ Vierervektoren sind, ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen ist.

---

4 (*) Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld (6 Punkte)

(a) (i) Leiten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld her.
Hinweis: Benutzen Sie dazu Ihre Kenntnis der Eichinvarianz der Schrödingergleichung, siehe Aufgabe 1. Sie müssen dazu Aufgabe 1 nicht explizit lösen.

(ii) Zeigen Sie, dass Ψ^* ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt, wobei Ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus dem Aufgabenteil (a) ist.

(b)(i) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$(-\hbar^2 c^2 \triangle + m^2 c^4)u(\vec{r}) \quad = \quad [E - e\Phi(r)]^2 u(\vec{r})\,.$$

(ii) Vergleichen Sie das daraus folgende Eigenwertproblem mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2+[(l+1/2)^2-(Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen, die in der Lösung der Klein-Gordon-Gleichung auftauschen. Der Vergleich liefert die Relationen zu den Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.

(iii) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.
