

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 05**

Abgabe: Fr., 24.11.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 28.11.2023

1 Eichinvarianz

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines geladenen Teilchens im Magnetfeld. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned}\vec{A} \rightarrow \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \\ \Phi \rightarrow \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \\ \Psi \rightarrow \Psi' &= \Psi e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda},\end{aligned}$$

wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. $\vec{A}$, Φ und Λ sind Funktionen von $\vec{r}$ und t . Q bezeichnet die elektrische Ladung des Teilchens.

Solution

We start with the Schrödinger equation

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - Q\vec{A} \right)^2 + Q\Phi \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

and multiple from the left by the factor $e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}$ and use the identity

$$e^{f(x)} \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) e^{f(x)},$$

on both the l.h.s. and r.h.s. of the equation above. Then we have

$$\begin{aligned}& \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - Q\vec{\nabla}\Lambda - Q\vec{A} \right)^2 + Q\Phi \right] e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda} \Psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + Q \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda} \Psi \\ \Rightarrow & \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - Q\vec{A}' \right)^2 + Q\Phi' \right] \Psi' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi' .\end{aligned}$$

(See also section 7.4.2 of Schwabl, *Quantum Mechanics*.)

2 (*) Lorentz-Transformation des elektromagnetischen Feldes (4 Punkte)

(a) Leiten Sie aus dem Transformationsverhalten des Feldstärketensors

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F_{\rho\sigma}$$

das Transformationsverhalten der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unter einer Lorentz-Transformation entlang der z -Achse her.

Solution

In convention $(+, -, -, -)$, we choose

$$E_i = -E^i = F^{0i}, \quad \epsilon^{ijk} B_k = F^{ij},$$

for $i, j = 1, 2, 3$, which amounts to the matrix notation

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Note that we also choose the convention for the Levi-Civita tensor as $\epsilon^{123} = -\epsilon_{123} = 1$. According to the transformation, we have

$$E'_i = F'^{0i} = \Lambda_{\mu}^0 F^{\mu\nu} \Lambda_{\nu}^i,$$

and we use $\epsilon_{ijm} \epsilon^{ijk} B_k = -2\delta_m^k B_k = \epsilon_{ijm} F^{ij}$ to obtain

$$B'_k = -\frac{1}{2} \epsilon'_{ijk} F'^{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Lambda_{\mu}^i F^{\mu\nu} \Lambda_{\nu}^j,$$

where we used the fact that ϵ_{ijk} is invariant under proper Lorentz transformation, and note the sign difference between ϵ_{ijk} and ϵ^{ijk} . The Lorentz boost along the z -axis can be parametrised by

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Plug the matrices into E'_i and B'_k (to the left and right of $F^{\mu\nu}$) yield the desired results.

(b) Berechnen Sie die Komponenten des dualen Feldstärketensors

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

Solution

Given our choice of $F^{\mu\nu}$ and metric tensor $g_{\mu\nu}$ with signature $(+, -, -, -)$, we have

$$F_{\rho\sigma} = g_{\rho\mu} F^{\mu\nu} g_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We choose the convention $\epsilon^{0123} = 1$, and we have

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie die Größen $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$. Wie verhalten sich diese unter Lorentz-Transformationen?

Solution

We can perform the contraction according to the matrices derived above

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= 2(-\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \\ \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= 2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \end{aligned}$$

Since they are all Lorentz scalar, they are invariant under Lorentz transformation.

3 Levi-Civita-Tensor und Lorentz-Transformation

(a) Zeigen Sie, dass der Levi-Civita-Tensor ein Pseudotensor vierter Stufe unter Lorentz-Transformation ist, *d.h.* dass gilt

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda) \Lambda^\alpha_{\alpha'} \Lambda^\beta_{\beta'} \Lambda^\gamma_{\gamma'} \Lambda^\delta_{\delta'} \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Ausdruck in der Mitte die Definition des Levi-Civita-Tensors erfüllt.

Solution

First we use the column expansion of determinant

$$\det(\Lambda) = \Lambda_{\alpha'}^0 \Lambda_{\beta'}^1 \Lambda_{\gamma'}^2 \Lambda_{\delta'}^3 \epsilon^{\alpha' \beta' \gamma' \delta'},$$

and we can show that

$$\epsilon'^{0123} = \det(\Lambda) \Lambda_{\alpha'}^0 \Lambda_{\beta'}^1 \Lambda_{\gamma'}^2 \Lambda_{\delta'}^3 \epsilon^{\alpha' \beta' \gamma' \delta'} = \det(\Lambda)^2 = (\pm 1)^2 = 1.$$

Second we show that by permuting two indices, we have

$$\begin{aligned} \epsilon'^{\alpha \beta \gamma \delta} &= \det(\Lambda) \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \Lambda_{\gamma'}^{\gamma} \Lambda_{\delta'}^{\delta} (-1) \epsilon^{\alpha' \beta' \gamma' \delta'} \\ &= -\epsilon'^{\alpha \beta \gamma \delta}, \end{aligned}$$

where the (-1) factor comes from the interchange of two columns.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\epsilon^{\alpha \beta \gamma \delta} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} d_{\delta}$, wobei $a_{\alpha}, b_{\beta}, c_{\gamma}, d_{\delta}$ Vierervektoren sind, ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen ist.

Solution

Here we define $X := \epsilon^{\alpha \beta \gamma \delta} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} d_{\delta}$, and we have have

$$\begin{aligned} X' &= \epsilon'^{\alpha \beta \gamma \delta} a'_{\alpha} b'_{\beta} c'_{\gamma} d'_{\delta} \\ &= \det(\Lambda) \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \Lambda_{\gamma'}^{\gamma} \Lambda_{\delta'}^{\delta} \epsilon^{\alpha' \beta' \gamma' \delta'} \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \Lambda_{\gamma}^{\rho} \Lambda_{\delta}^{\sigma} a_{\mu} b_{\nu} c_{\rho} d_{\sigma} \\ &= \det(\Lambda) \epsilon^{\mu \nu \rho \sigma} a_{\mu} b_{\nu} c_{\rho} d_{\sigma} \\ &= \det(\Lambda) X. \end{aligned}$$

Hence X is a pseudoscalar under Lorentz transformation. Note that $\det(\Lambda) = \pm 1$ for the proper or improper Lorentz transformation.

4 (*) Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld (6 Punkte)

(a) (i) Leiten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld her.

Hinweis: Benutzen Sie dazu Ihre Kenntnis der Eichinvarianz der Schrödingergleichung, siehe Aufgabe 1. Sie müssen dazu Aufgabe 1 nicht explizit lösen.

Solution

Da wir ein relativistisches Teilchen betrachten starten wir mit der rel. Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

In diese Relation setzen wir nun die Operatordefinitionen für E und $\vec{p}$ ein. Da hier ein geladenes Teilchen betrachtet wird nutzen zudem die minimale Kopplung

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}, \quad E \rightarrow E - q\phi$$

und erhalten damit

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2 = m^2 c^4 + \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 c^2$$

(ii) Zeigen Sie, dass Ψ^* ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt, wobei Ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus dem Aufgabenteil (a) ist.

Solution

Aus der vorherigen Teilaufgabe wissen wir, dass

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2 \Psi = m^2 c^4 \Psi + \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 c^2 \Psi.$$

Die Gleichung für Ψ^* erhalten wir durch komplexe Konjugation, wodurch in diesem Fall lediglich Vorzeichen geändert werden:

$$(-i\hbar\partial_t - q\phi)^2 \Psi^* = m^2 c^4 \Psi^* + \left(i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 c^2 \Psi^*.$$

Durch Ersetzen von $q' = -q$ ergibt sich somit die Gleichung

$$(i\hbar\partial_t - q'\phi)^2 \Psi^* = m^2 c^4 \Psi^* + \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q'\vec{A}\right)^2 c^2 \Psi^*.$$

was zu zeigen war.

(b) (i) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$(-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4)u(\vec{r}) = [E - e\Phi(r)]^2 u(\vec{r}). \quad (1)$$

Solution

Für ein Coulombpotential ergibt sich $\vec{A} = 0$ und somit mit Einsetzen des gegebenen Ansatzes

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2 u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar} = m^2c^4u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar} + \left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2 c^2u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}.$$

Nach Ausführen der Zeitableitung erhält man die Differentialgleichung für $u(\vec{r})$:

$$(E^2 + q^2\phi^2 - 2q\phi E) u(\vec{r}) = \left(m^2c^4 - c^2\hbar^2\vec{\nabla}^2\right) u(\vec{r}).$$

(ii) Vergleichen Sie das daraus folgende Eigenwertproblem mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2 + [(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen, die in der Lösung der Klein-Gordon-Gleichung auftauchen. Der Vergleich liefert die Relationen zu den Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.

Solution

Da wir es hier mit einem radialsymmetrischen Potential zu tun haben, können wir für den räumlichen Anteil der Wellenfunktion den folgenden Separationsansatz machen:

$$u(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\Theta, \varphi).$$

Analog zu der Rechnung für das Wasserstoffatom kann damit folgende Gleichung für die Radialwellenfunktion gefunden werden:

$$\frac{1}{c^2} \left(\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 - m^2 c^4 \right) R(r) = \hbar^2 \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) \quad (2)$$

Aus der nichtrelativistischen Rechnung für das Wasserstoffatom erhalten wir (sollte aus TheoD bekannt sein)

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right) R(r) = \left(E' + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R(r). \quad (3)$$

Wir formen Gleichung (2) um die gleiche Form wie im nichtrelativistischen Fall zu erhalten:

$$\left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{2E} + \frac{Z\alpha}{r} \right) R(r) = \frac{\hbar^2 c^2}{2E} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{l(l+1) - Z^2 \alpha^2}{r^2} \right) R(r)$$

Durch Vergleich beider Gleichung können wir ablesen:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{Er - m^2 c^4}{2E} \\ \mu &= \frac{E}{c^2} \\ l' &= \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - Z^2 \alpha^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass für das nichtrelativistische Wasserstoffatom gilt:

$$E' = -\frac{Z^2 \alpha^2 \mu c^2}{2n'^2},$$

wobei n' die Hauptquantenzahl des nichtrelativistischen Wasserstoffatoms ist. Damit ergibt sich nach Einsetzen von μ und E' und Umstellen nach E

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n'^2}}}$$

Solution

Für das nichtrelativistische Wasserstoffatom gilt $n' = n_r + l'$ mit der radial Quantenzahl n_r .
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(n_r + l')^2}}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n - l + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 \alpha^2} - \frac{1}{2}\right)^2}}} \end{aligned}$$

(iii) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.

Solution

Eine Taylorentwicklung in $Z\alpha$ ergibt

$$\begin{aligned} E' &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 \alpha^2} - \frac{1}{2}\right)^2}}} \\ &= mc^2 - \frac{mc^2}{2(n_r + l)^2} (Z\alpha)^2 - \frac{mc^2(8n_r + 2l - 3)}{8(1 + 2l)(n_r + l)^4} (Z\alpha)^4 \end{aligned}$$