Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 06**

Abgabe: Fr., 01.12.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 05.12.2023

---

1 (*) Eichinvarianz Dirac-Gleichung (5 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator der Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld und zeigen Sie, dass die Dirac-Gleichung invartiant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned} \vec{A} \to \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda\,, \\ \Phi \to \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda\,, \\ \Psi \to \Psi' &= \Psi\,\exp(ie\Lambda/\hbar)\,, \end{aligned}$$

wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. $\vec{A}$, Φ und Λ sind Funktionen von $\vec{r}$ und t. $(-e)$ ist die Ladung des Elektrons.

Solution

We start with the Dirac equation

$$\left[c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right]\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

and multiple from the left by the factor $e^{\frac{ie}{\hbar}\Lambda}$ and use the identity

$$e^{f(x)}\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\right)e^{f(x)}\,,$$

on both the l.h.s. and r.h.s. of the equation above. Then we have

$$\begin{aligned} &\left[c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{\nabla}\Lambda - e\vec{A}\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right]e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\Psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\Psi \\ \Rightarrow\quad &\left[c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}'\right) + \beta mc^2 + e\Phi'\right]\Psi' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi'\,. \end{aligned}$$

---

2 $Z \to \tau^+\tau^-$

Ein ruhendes Z-Boson der Masse $M_Z = 91.1887\,\mathrm{GeV}/c^2$ zerfalle in ein $\tau^+\tau^-$-Paar ($m_{\tau^\pm} = 1.7771\,\mathrm{GeV}/c^2$).

(a) Berechnen Sie die Energie und den Impuls der Zerfallsprodukte (in GeV bzw. GeV/c).

Solution

Let $p_1^\mu, p_2^\mu and p_3^\mu$ be the 4-momenta of the Z-Boson p_1^μ and the Taus. We start with the Z-Boson mass at rest, which translates to

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} M_Z c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Momentum and energy conservation implies

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} M_Z c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p_2^\mu + p_3^\mu = \begin{pmatrix} M_Z c/2 \\ 0 \\ 0 \\ -|\vec{p}| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_Z c/2 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{p}| \end{pmatrix},$$

where we chose $\vec{p} \,||\, \vec{e}_z$ w.l.o.g. The energy of the τ is therefore given by

$$E_\tau = M_Z c^2/2 = 45.5944\text{GeV}$$

and its momentum can be calculated using the energy momentum relation $E^2 = m^2c^4 + |\vec{p}|^2 c^2$:

$$|\vec{p}| = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{M_Z c^4}{4} - m_\tau^2 c^4} = 45.5597\text{GeV/c}$$

(b) Die mittlere Lebensdauer ruhender τ-Leptonen beträgt $2.956 \cdot 10^{-13}$s. Wie weit kommen die τ-Leptonen im Mittel?

Solution

We know the lifetime of the τ in its restframe and want to calculate the lifetime in the restframe of the Z. We therefore need to find the Lorentz transformation to switch between both. We can calculate the corresponding γ using

$$E_\tau = M_z c^2/2 = \gamma m_\tau c^2$$
$$\to \gamma = \frac{M_z}{2m_\tau} = 25.6566$$

With γ we can also calculate β using

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \leftrightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0.99924$$

As a last step we have to transform to the restframe of the Z which means

$$\begin{pmatrix} T'_\tau c \\ 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_\tau c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma T_\tau c \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta T_\tau c \end{pmatrix}.$$

We finally find

$$z = \gamma\beta T_\tau c = 0.00227193\text{m}$$

---

3 (*) Gamma-Matrizen (5 Punkte)

(a) Die Gamma-Matrizen genügen der Dirac-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}\,.$$

Sie haben in der Dirac-Darstellung folgende Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ_i, $i = 1, 2, 3$ die Pauli Matrizen bezeichnen.
Berechnen Sie die Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\,, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\,, \tag{1}$$

in der Dirac-Darstellung.

Solution

We have for $i = 1, 2, 3$

$$\sigma_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{0i} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{i0} = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = -2i(g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\omega} - g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\omega} - g_{\mu\omega}\sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\omega}\sigma_{\mu\rho}) \,.$$

Solution

We have

$$\big[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}\big] = \frac{i}{2}\bigg(\Big[\gamma_\rho, \big[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\omega\big]\Big] - \Big[\gamma_\omega, \big[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\rho\big]\Big]\bigg)$$

Then we can derive

$$\begin{aligned}\big[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\omega\big] &= \frac{i}{2}\big(\gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_\omega\} - \gamma_\nu\{\gamma_\mu, \gamma_\omega\} - \{\gamma_\omega, \gamma_\mu\}\gamma_\nu + \{\gamma_\omega, \gamma_\nu\}\gamma_\mu\big) \\ &= 2\,i\,\big(g_{\omega\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\omega}\gamma_\nu\big)\,,\end{aligned}$$

where in the last line we used the identity $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$. Finally we have

$$\begin{aligned}\big[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}\big] &= (-1)\Big(g_{\omega\nu}[\gamma_\rho, \gamma_\mu] - g_{\mu\omega}[\gamma_\rho, \gamma_\nu] - g_{\rho\nu}[\gamma_\omega, \gamma_\nu] + g_{\mu\rho}[\gamma_\omega, \gamma_\nu]\Big) \\ &= 2i\Big(g_{\omega\nu}\sigma_{\rho\mu} - g_{\mu\omega}\sigma_{\rho\nu} - g_{\rho\nu}\sigma_{\omega\nu} + g_{\mu\rho}\sigma_{\omega\nu}\Big)\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned}\not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} &= 2A\cdot B\,, \quad & \gamma^\nu\not{A} + \not{A}\gamma^\nu &= 2A^\nu\,, \\ \gamma^\nu\not{A}\gamma_\nu &= -2\not{A}\,, & \gamma^\nu\not{A}\not{B}\gamma_\nu &= 4A\cdot B\,,\end{aligned}$$

wobei A und B Vierervektoren sind und die Notation $\not{A} = A_\mu\gamma^\mu$ verwendet wurde.
Hinweis: Für Aufgabenteil (b) und (c) soll keine explizite Darstellung der Gamma-Matrizen verwendet werden.

Solution

We can show that

$$\begin{aligned}\not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} &= A_\mu B_\nu\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2A_\mu B_\nu g^{\mu\nu} = 2A\cdot B\,, \\ \gamma^\nu\not{A} + \not{A}\gamma^\nu &= A_\mu\big(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\big) = 2A_\mu g^{\mu\nu} = 2A^\nu\,, \\ \gamma^\nu\not{A}\gamma_\nu &= A_\mu\big(2g^{\mu\nu}\gamma_\nu - 4\gamma^\mu\big) = -2\not{A}\,, \\ \gamma^\nu\not{A}\not{B}\gamma_\nu &= A_\rho B_\sigma\big(2\gamma^\sigma\gamma^\rho + 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\big) = 2A_\rho B_\sigma\{\gamma^\sigma, \gamma^\rho\} = 4A\cdot B\,.\end{aligned}$$

---

4 Rechnen mit natürlichen Einheiten

In der Teilchenphysik rechnet man in einem Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. Das bedeutet, dass Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit und Wirkungen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums dividiert durch 2π angegeben werden.

1. Welche Beziehungen folgen daraus zwischen den Einheiten Meter, Sekunde und MeV?
   Hinweis: $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ und $\hbar = 6{,}582\,119 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{MeV\ \ s}$.

2. Welcher Masse in Kilogramm entspricht $1\,\mathrm{MeV}$?
   Hinweis: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602\,176 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

3. Drücken Sie die inverse Pionenmasse ($m_\pi = 140$ MeV) in fm($= 10^{-15}$m) aus.

4. Das Z-Boson hat eine Breite von 2.50 GeV, siehe auch
   `https://pdg.lbl.gov/2020/listings/rpp2020-list-z-boson.pdf`.
   Wie lange ist die Lebensdauer des Z-Bosons in Sekunden?

Solution

Lösung (i)

$$[L] = [c][T] = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 1\,\mathrm{s} = 299\,792\,458\,\mathrm{m}.$$

$$[E] = 1\mathrm{s}^{-1} = [\hbar][T]^{-1} = 6.582\,119 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV}.$$

Lösung (ii)

$$1\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^2} = \frac{10^6 \times 1.602\,176 \times 10^{-19}}{(299\,792\,458)^2}\frac{\mathrm{Js}^2}{\mathrm{m}^2} = 1.78 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg},$$

Lösung (iii)

$$\frac{1}{140\mathrm{MeV}} = \frac{1}{140\mathrm{MeV}} \times 6.582\,119 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\ s} \times 299\,792\,458\mathrm{m/s} = 1.41\,\mathrm{fm}$$

Lösung (iv)

$$\tau_Z = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.582\,119 \times 10^{-22}\mathrm{MeV\ s}}{2.50\,\mathrm{GeV}} = 2.63 \times 10^{-25}\,\mathrm{s}.$$