

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 07**

Abgabe: Fr., 08.12.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 12.12.2023

1 Gyromagnetischer Faktor des Protons

Um ein Proton zu beschreiben, muss die Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines magnetischen Feldes um den Term $(k_p e / 4m_p) \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Psi$ erweitert werden. $F^{\mu\nu}$ ist der Feldstärketensor und $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$. Bestimmen Sie k_p so, dass der gemessene Wert des gyromagnetischen Faktors des Protons, $g_p = 5.59$ reproduziert wird.

Hinweis: Betrachten Sie dabei ein schwaches homogenes Magnetfeld mit dem Vektorpotential $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$.

2 (*) Stromerhaltung (4 Punkte)

Ψ sei eine Lösung der Dirac-Gleichung für ein Teilchen der Masse m und Ladung q in einem äußeren elektromagnetischen Feld

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi = 0.$$

- (a) Welcher Gleichung genügt $\bar{\Psi}$?
- (b) Zeigen Sie, dass der Dirac-Strom $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ erhalten ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen auch die Klein-Gordon-Gleichung $(\square + m^2)\Psi = 0$ erfüllen.
- (d) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes folgender Gleichung

$$[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu) + \frac{1}{2}q\sigma^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + m^2]\Psi = 0$$

genügt, wobei $F_{\lambda\mu}$ der Feldstärke-Tensor ist.

Hinweis: Überzeugen Sie sich davon, dass $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, sowie $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$ ($k = 1, 2, 3$) gilt.

3 (*) Dirac-Spinoren und räumliche Drehungen (3 Punkte)

D_z sei die dreidimensionale Drehmatrix für die Drehung um den Winkel ϕ um die z -Achse und S_R die entsprechende Drehung der Spinoren.

- (a) Zeigen Sie, dass die Transformationsmatrix S_R in folgender Form geschrieben werden kann

$$S_R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

(b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass gilt $S_R^{-1} \gamma_j S_R = (D_z)_{ji} \gamma_i$.

4 (*) Pauli-Gleichung und Spin-Bahn-Kopplung (3 Punkte)

Um die Pauli-Gleichung aus der Dirac-Gleichung abzuleiten wird diese im nichtrelativistischen Limes betrachtet. Dabei erhält man die Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + q\Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit den zweikomponentigen Spinoren φ und χ . Um die Pauli-Gleichung zu erhalten kann nun die untere Komponente dieser Gleichung für $|i\hbar\partial_t\chi|, |q\Phi\chi| \ll |mc^2\chi|$ betrachtet werden, was dem nicht-relativistischen Limes entspricht. Diese Annahme führt zu folgender Beziehung zwischen φ und χ

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})}{2mc^2} \varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}, \frac{q\Phi}{2mc^2}\right), \quad (2)$$

die in die obere Komponente von Gleichung (1) eingesetzt werden kann (siehe Vorlesung).

(a) Leiten Sie eine Relation zwischen φ und χ analog zu Gleichung (2) her. Berücksichtigen Sie hierbei zusätzlich Terme in erster Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{q\Phi}{2mc^2}\right)$. Nehmen Sie dafür wie oben $|i\hbar\partial_t\chi| \ll |mc^2\chi|$ an und entwickeln Sie den resultierenden Ausdruck für χ in $\frac{q\Phi}{2mc^2}$.

(b) Setzen Sie den in Teilaufgabe (a) gefundenen Ausdruck für χ in die obere Komponente von Gleichung (1) ein. Hierbei tritt ein Term der Form

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Phi(\vec{r}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p}$$

auf. Formen Sie diesen Term um, indem Sie den Impulsoperator nach rechts durchkommutieren und die entstehenden Ausdrücke vereinfachen. Beachten Sie, dass der Impulsoperator $\vec{p}$ die räumliche Ableitung enthält. Wie lautet die resultierende Gleichung für φ ?

(c) Wir betrachten nun den Fall $q = -e$, $\Phi = \Phi(r)$ und $\vec{A} = 0$, was beispielsweise einem Elektron im Wasserstoffatom entspricht. Identifizieren Sie in ihrem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe den Drehimpulsoperator. Wie sieht der Term des Hamiltonoperators aus, der diesen Operator enthält? Was bedeutet dieser Term physikalisch?