# Moderne Theoretische Physik II
# (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 07**

Abgabe: Fr., 08.12.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 12.12.2023

---

## 1 Gyromagnetischer Faktor des Protons

Um ein Proton zu beschreiben, muss die Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines magnetischen Feldes um den Term $(k_p e/4m_p)\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Psi$ erweitert werden. $F^{\mu\nu}$ ist der Feldstärketensor und $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$. Bestimmen Sie $k_p$ so, dass der gemessene Wert des gyromagnetischen Faktors des Protons, $g_p = 5.59$ reproduziert wird.
*Hinweis:* Betrachten Sie dabei ein schwaches homogenes Magnetfeld mit dem Vektorpotential $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$.

Solution

Wie in der Aufgabenstellung gefordert betrachten wir die Dirac-Gleichung mit dem zusätzlich gegebenen Term:

$$\left(i\hbar\partial_t - e\Phi + \frac{k_\rho e}{4m_p}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\Psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \beta mc^2\right)\Psi$$

Analog zur Vorlesung (und der Aufgabestellung in Aufgabe 4) bechreiben wir $\Psi$ über die zweikomponentigen Spinoren $\varphi, \chi$ und finden im nichtrelativistischen Limit die Beziehung

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)}{2mc^2}\varphi.$$

Einsetzen dieser Relation in die Differentialgleichung von $\varphi$ liefert

$$i\hbar\partial_t\varphi = \left(\frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + e\Phi - \frac{k_\rho e}{4m_p}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\varphi,$$

wobei $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 - e\hbar/c\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ mit $\vec{\pi} = \vec{p} - e/c\vec{A}$ (folgt aus Eigenschaften der Pauli-Matrizen, siehe z. Bsp. Schwabl QM2 oder Vorlesung). Unter Verwendung des Hinweises, dass das Magnetfeld schwach sein soll und unter Verwendeung der Coulomb-Eichung ($\vec{\nabla}\vec{A} = 0$) erhalten wir für den ersten Term

$$\begin{aligned}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 &= \vec{p}^2 - \frac{e}{c}\vec{p}\cdot\vec{A} - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{p} + \mathcal{O}\left(\vec{A}^2\right)\\ &= \vec{p}^2 - \frac{e}{c}\vec{B}\cdot\vec{L} + \mathcal{O}\left(\vec{A}^2\right).\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt betrachten wir den zusätzlich hinzigefügten Operator. Wir wählen $\vec{B}||\vec{e}_z$, wodurch wir

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_z & 0\\ 0 & -B_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

erhalten. Ausserdem verwenden wir

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}$$

und erhalten damit für das oben gegebene $F^{\mu\nu}$

$$\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\sigma_{12}B_3 = 4\vec{S}\cdot\vec{B} \tag{1}$$

Solution

$$i\hbar\partial_t\varphi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\left(2\vec{S}+\vec{L}\right)\cdot\vec{B} + e\Phi - \frac{k_\rho e}{4m_p}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\varphi$$
$$= \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\left((2+2k_\rho)\vec{S}+\vec{L}\right)\cdot\vec{B} + e\Phi\right)\varphi.$$

Mit der Vorgabe $(2+2k_\rho) = 5.59$ ergbit sich $k_\rho = 1.795$

---

## 2 (*) Stromerhaltung (4 Punkte)

$\Psi$ sei eine Lösung der Dirac-Gleichung für ein Teilchen der Masse $m$ und Ladung $q$ in einem äußeren elektromagnetischen Feld

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi = 0\,.$$

(a) Welcher Gleichung genügt $\overline{\Psi}$?

Solution

Im Folgenden wird $\hbar = c = 1$ gesetzt.

In einem ersten Schritt bbilden wir das hermitesch konjugierte der Dirac-Gleichung

$$([\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi)^\dagger = \Psi^\dagger[\gamma^\mu(i\overleftarrow{\partial_\mu} - qA_\mu) - m]^\dagger$$

Durch Multiplikation mit $\gamma^0$ von rechts ergibt sich

$$\begin{aligned}\Psi^\dagger[\gamma^\mu(i\overleftarrow{\partial_\mu} - qA_\mu) - m]^\dagger\gamma^0 &= [-i\partial_\mu\Psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - qA_\mu\Psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - m\Psi^\dagger\gamma^0]\\ &= [-i\partial_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu - qA_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu - m\overline{\Psi}]\\ &= i\partial_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu + qA_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu + m\overline{\Psi} = 0\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass der Dirac-Strom $j^\mu = \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ erhalten ist.

Solution

Wir multiplizieren die in der Aufgabenstellung gegebene Dirac-Gleichung von links mit $\overline{\Psi}$

$$i\overline{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) - qA_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi - m\overline{\Psi}\Psi = 0$$

und das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe mit $\Psi$ von rechts:

$$i(\partial_\mu\overline{\Psi})\gamma^\mu\Psi + qA_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi + m\overline{\Psi}\Psi = 0$$

Diese beiden Gleichungen addieren wir und erhalten damit

$$i\left(\overline{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) + (\partial_\mu\overline{\Psi})\gamma^\mu\Psi\right) = i\partial_\mu\left(\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right) = 0$$

(c) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen auch die Klein-Gordon-Gleichung $(\Box + m^2)\Psi = 0$ erfüllen.

Solution

Wir betrachten

$$\begin{aligned}(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\Psi = 0 \\ = [i^2\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu - 2mi\gamma^\mu\partial_\mu + m^2]\Psi\end{aligned}$$

Den ersten Term können wir vereinfachen über

$$\begin{aligned}\not{\partial}\not{\partial} &= \gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu \\ &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)\partial_\nu\partial_\mu \\ &= 2\Box - \not{\partial}\not{\partial}\end{aligned}$$

ersetzen. Der zweite Term kann über das Einsetzen der Dirac-Gleichung umgeschrieben werden:

$$-2mi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = -2m^2\Psi.$$

Somit ergibt sich

$$[\Box + m]\Psi = 0$$

(d) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes folgender Gleichung

$$[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu) + \frac{1}{2}q\sigma^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + m^2]\Psi = 0$$

genügt, wobei $F_{\lambda\mu}$ der Feldstärke-Tensor ist.
*Hinweis:* Überzeugen Sie sich davon, dass $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, sowie $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$ $(k = 1, 2, 3)$ gilt.

Solution

Wir definieren $D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$ und können damit die Dirac-Gleichung schreiben als

$$\left(i\not{D} - m\right)\Psi = 0;$$

Wir multiplizieren von links mit $(-i\not{D} - m)$ und erhalten damit

$$\left(\not{D}\not{D} + m^2\right)\Psi = 0.$$

Unter Ausnutzung der Relation für die Gamma-Matrizen $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$ können wir diese Gleichung umschreiben und erhalten:

$$\left(D^2 - i\sigma^{\mu\nu}D_\mu D_\nu + m^2\right)\Psi = 0.$$

Betrachten wir den mittleren Term dieser Gleichung genauer erhalten wir

$$-i\sigma^{\mu\nu}D_\mu D_\nu\Psi = q\sigma^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu + A_\mu\partial_\nu\right)\Psi = q\sigma^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\Psi.$$

Hierbei wurde im ersten Schritt verwendet, dass das Produkt eines symmetrischen mit einem antisymmetrischen tensor 0 ist und im dritten Schritt, dass $\sigma^{\mu\nu}A_\nu\partial_\mu = -\sigma^{\nu\mu}A_\nu\partial_\mu = -\sigma^{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu$. Wir ersetzen nun

$$\sigma^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\Psi = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\Psi = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi$$

und erhalten damit die gewünschte Gleichung.

---

## 3 (*) Dirac-Spinoren und räumliche Drehungen (3 Punkte)

$D_z$ sei die dreidimensionale Drehmatrix für die Drehung um den Winkel $\phi$ um die $z$-Achse und $S_R$ die entsprechende Drehung der Spinoren.
(a) Zeigen Sie, dass die Transformationsmatrix $S_R$ in folgender Form geschrieben werden kann

$$S_R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Solution

Es gilt

$$S_R = \exp\left(\frac{i}{2}\phi\sigma_{12}\right),$$

mit

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{i}{2}\left[\gamma_1, \gamma_2\right] = i\gamma_1\gamma_2, \\ \sigma_{12}^2 &= 1\end{aligned}$$

Wir entwickeln $S_R$ und erhalten dabei

$$\begin{aligned}S_R &= 1 + i\left(\frac{\phi}{2}\right)\sigma_{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{2!}\right)^2(\sigma_{12})^2 - \frac{i}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3(\sigma_{12})^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4(\sigma_{12})^4 + \dots \\ &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass gilt $S_R^{-1}\gamma_j S_R = (D_z)_{ji}\gamma_i$.

Solution

Für $D_z$ gilt

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Benutzen des Ergebnisses aus der ersten Teilaufgabe liefert

$$S_R^{-1}\gamma_j S_R = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\gamma_j + i\left[\gamma_j, \sigma_{12}\right]\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\sigma_{12}\gamma_j\sigma_{12}$$

Wir haben oben gezeigt, dass $\sigma_{12} = i\gamma_1\gamma_2$. Damit ergibt sich $i\left[\gamma_j, \sigma_{12}\right] = -(g_{j1}\gamma_2 - g_{j2}\gamma_1)$ und somit für den letzte Term

$$\begin{aligned} \sigma_{12}\gamma_j\sigma_{12} &= \sigma_{12}\left(\left[\gamma_j, \sigma_{12}\right] + \sigma_{12}\gamma_j\right) \\ &= \gamma_j + 2\left(g_{j1}\gamma_1 + g_{j2}\gamma_2\right) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die drei unterschiedlichen Möglichkeiten für $j$ und erhalten für $j = 1$:

$$S_R^{-1}\gamma_1 S_R = \gamma_1\left(1 + 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) + \gamma_2\sin(\phi) = \gamma_1\cos(\phi) + \gamma_2\sin(\phi).$$

für $j = 2$:

$$S_R^{-1}\gamma_2 S_R = \gamma_2\left(1 + 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) - \gamma_1\sin(\phi) = \gamma_2\cos(\phi) - \gamma_1\sin(\phi).$$

für $j = 3$:

$$S_R^{-1}\gamma_3 S_R = \gamma_3.$$

Das ist genau das was wir erwartet haben.

---

# 4 (*) Pauli-Gleichung und Spin-Bahn-Kopplung (3 Punkte)

Um die Pauli-Gleichung aus der Dirac-Gleichung abzuleiten wird diese im nichtrelativistischen Limes betrachtet. Dabei erhält man die Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)\begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + q\Phi\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit den zweikomponentigen Spinoren $\varphi$ und $\chi$. Um die Puli-Gleichung zu erhalten kann nun die untere Komponente dieser Gleichung für $|i\hbar\partial_t\chi|, |q\Phi\chi| \ll |mc^2\chi|$ betrachtet werden, was dem nicht-relativistischen Limes entspricht. Diese Annahme führt zu folgender Beziehung zwischen $\varphi$ und $\chi$

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)}{2mc^2}\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}, \frac{q\Phi}{2mc^2}\right), \tag{3}$$

die in die obere Komponente von Gleichung (2) eingesetzt werden kann (siehe Vorlesung).

(a) Leiten Sie eine Relation zwischen $\varphi$ und $\chi$ analog zu Gleichung (3) her. Berücksichtigen Sie hierbei zusätzlich Terme in erster Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{q\Phi}{2mc^2}\right)$. Nehmen Sie dafür wie oben $|i\hbar\partial_t\chi| \ll |mc^2\chi|$ an und entwickeln Sie den resultierenden Ausdruck für $\chi$ in $\frac{q\Phi}{2mc^2}$.

Solution

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi = c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)\varphi + q\Phi\chi - 2mc^2\chi.$$
$$\rightarrow \chi = \frac{1}{2mc}\left(1+\frac{q\Phi}{2mc^2}\right)c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}, \frac{q^2\Phi^2}{4m^2c^4}\right).$$

(b) Setzen Sie den in Teilaufgabe (a) gefundenen Ausdruck für $\chi$ in die obere Komponente von Gleichung (2) ein. Hierbei tritt ein Term der Form

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\;\Phi(\vec{r})\;\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$$

auf. Formen Sie diesen Term um, indem Sie den Impulsoperator nach rechts durchkommutieren und die entstehenden Ausdrücke vereinfachen. Beachten Sie, dass der Impulsoperator $\vec{p}$ die räumliche Ableitung enthält. Wie lautet die resultierende Gleichung für $\varphi$?

Solution

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial}\varphi &= \left(\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(1-\frac{e\Phi}{2mc^2}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{p} - e\Phi\right)\varphi \\ &= \left(\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 - \frac{e}{4m^2c^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Phi(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) - e\Phi\right)\varphi. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Relation

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

und

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Phi(r)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) &= (\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\Phi)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) + \Phi(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 \\ &= -i\hbar(\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{p} + \hbar\vec{\sigma}\cdot\left((\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{p}\right) + \Phi\vec{p}^2 \end{aligned}$$

ergibt sich für die Differentialgleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial}\varphi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{4m^2c^2}\left(-i\hbar(\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{p} + \hbar\vec{\sigma}\cdot\left((\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{p}\right) + \Phi\vec{p}^2\right) - e\Phi\right)\varphi.$$

Wobei im zweiten Schritt verwendet wurde, dass dieser Term auf $\varphi$ wirkt und dementsprechend eine Produktregel angewendet werden muss.

(c) Wir betrachten nun den Fall $q = -e$, $\Phi = \Phi(r)$ und $\vec{A} = 0$, was beispielsweise einem

Elektron im Wasserstoffatom entspricht. Identifizieren Sie in ihrem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe den Drehimpulsoperator. Wie sieht der Term des Hamiltonoperators aus, der diesen Operator enthält? Was bedeutet dieser Term physikalisch?

Solution

Das Potential hängt nur von $r$ ab, somit gilt

$$\vec{\nabla}\Phi(r) = \frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r}\vec{e_r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\vec{r}.$$

Damit lässt sich $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Phi(r)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})$ schreiben über

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Phi(r)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = -\frac{i\hbar}{r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\vec{r}\cdot\vec{p} + \frac{\hbar}{r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{L} + \Phi\vec{p}^2.$$

Der hierbei interessante Term im Hamiltonoperator ist

$$-\frac{e}{4m^2c^2}\frac{\hbar}{r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{L} = -\frac{e}{2m^2c^2r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\vec{S}\cdot\vec{L}$$

Er führt zur Aufhebung der Entartung der Energieniveaus mit gleicher Quantenzahl $n$ und unterschiedlicher Quantenzahl $l$ im Wasserstoffatom.