

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 08**

Abgabe: Fr., 15.12.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 19.12.2023

1 (*) Nicht-relativistischer Limes für bilineare Kovarianten (3 Punkte)

Bestimmen Sie das führende Verhalten in v/c der bilinearen Kovarianten $\bar{u}\Gamma u$ (mit $\Gamma \in \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5\}$), wobei u eine Lösung der freien Dirac-Gleichung zum Impuls p^μ ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass die beiden unteren Komponenten von u von der Ordnung v/c relativ zu den oberen sind.

2 (*) Dirac Gleichung (3 Punkte)

- (a) Die Dirac-Gleichung im Impulsraum ist gegeben durch

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \tag{1}$$

wobei $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$. Berechnen Sie alle vier Lösungen $u_{1,2,3,4}(p)$.

- (b) Berechnen Sie alle vier Lösungen $v_{1,2,3,4}(p)$ der Dirac-Gleichung für Anti-Teilchen

$$(\not{p} + m)v(p) = 0. \tag{2}$$

- (c) Berechnen Sie die Relation zwischen $v_{1,2}(p)$ und $u_{3,4}(p)$ und bestimmen Sie den Spin der Lösungen $u_{1,2,3,4}(p)$ und $v_{1,2,3,4}(p)$.
-

3 (*) Projektoren für Energie und Spin (4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\Lambda_\pm(p), \Sigma(s)],$$

wobei $\Lambda_\pm(p) = \frac{\pm\not{p} + m}{2m}$ und $\Sigma(s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}$ den Energie- bzw. Spinprojektor bezeichnet. s^μ ist der Spin-Vierervektor und p^μ der Viererimpuls.

- (b) Zerlegen Sie s^μ in $\xi p^\mu + \eta g^{\mu 0}$, indem Sie $s^2 = -1$ und $s \cdot p = 0$ benutzen. Gegen welchen Ausdruck strebt s^μ für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$?

(c) Berechnen Sie $\Lambda_+ \Sigma(s)$ für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$.

(d) Zeigen Sie, dass für freie Elektron-Wellenfunktionen mit s^μ und p^μ gilt

$$u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = (\Lambda_+(p))_{\alpha\delta} (\Sigma(s))_{\delta\beta}.$$

α und β sind hier Spinorindizes.

4 Lagrange Multiplikatoren

Finden Sie Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ in

1. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
2. $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Benutzen sie die Methode der Lagrange Multiplikatoren.
