

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 08**

Abgabe: Fr., 15.12.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 19.12.2023

1 (*) Nicht-relativistischer Limes für bilineare Kovarianten (3 Punkte)

Bestimmen Sie das führende Verhalten in v/c der bilinearen Kovarianten $\bar{u}\Gamma u$ (mit $\Gamma \in \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5\}$), wobei u eine Lösung der freien Dirac-Gleichung zum Impuls p^μ ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass die beiden unteren Komponenten von u von der Ordnung v/c relativ zu den oberen sind.

Für die Lösung der Dirac-Gleichung kennen wir aus der Vorlesung

$$u = N \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad N = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}}$$

Betrachten wir nun $\bar{u}\Gamma u$ ergibt sich

$$\bar{u}\Gamma u = u^\dagger \gamma_0 \Gamma u = N^2 \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \chi_s \end{pmatrix}^\dagger \gamma_0 \Gamma \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \chi_s \end{pmatrix}$$

Die zu betrachtenden Γ -Strukturen sind

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_0 \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^i \gamma_5 &= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \\ \sigma^{0i} &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^{i0} &= -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^{ij} &= \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

So erhalten wir beispielsweise für den Fall $\Gamma = \mathbb{1}$:

$$\bar{u}\mathbb{1}u = u^\dagger \gamma_0 u = N^2 \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \chi_s \end{pmatrix}^\dagger \gamma_0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \chi_s \end{pmatrix} = N^2 \left(1 - \chi_s^\dagger \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{(p_0 + m)^2} \chi_s \right)$$

Wir setzen O.B.d.A. $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$, dadurch ergibt sich

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) = |\vec{p}|^2 \sigma^3 \cdot \sigma^3 = |\vec{p}|^2.$$

(Man könnte hier auch $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$ verwenden). Dementsprechend erhalten wir unter Verwendung von $p_0 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$

$$\bar{u}\mathbb{1}u = N^2 \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0 + m)^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}} - \frac{|\vec{p}|^2}{2m^2} \frac{1}{(1 + \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}})} = 1$$

Mit analoger Rechnung folgt

$$\bar{u}\gamma_0 u = N^2 \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0 + m)^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}} + \frac{|\vec{p}|^2}{2m^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right)$$

Die weiteren Lösungen folgen analog...

2 (*) Dirac Gleichung (3 Punkte)

(a) Die Dirac-Gleichung im Impulsraum ist gegeben durch

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad (1)$$

wobei $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$. Berechnen Sie alle vier Lösungen $u_{1,2,3,4}(p)$.

Solution

Define $(E, \vec{p}) = p^\mu$. Um die Gleichung zu lösen betrachten wir in einem ersten Schritt den Fall eines ruhenden Teilchens. Dadurch wird die DGL zu

$$(i\gamma_0 \partial_t - m) \Psi = 0.$$

Wir betrachten die Gleichung für jede der vier Komponenten von Ψ und erhalten

$$\begin{aligned} i\partial_t \Psi_{1,2} - \Psi_{1,2} m &= 0 \\ i\partial_t \Psi_{3,4} + \Psi_{3,4} m &= 0, \end{aligned}$$

was die Lösungen

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, & \Psi_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \\ \Psi_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt}, & \Psi_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt} \end{aligned}$$

Mit dieser Lösung machen wir folgenden Ansatz für die Lösungen mit nicht verschwindendem Impuls:

$$\Psi_{1,2} = u_{1,2}(k) e^{-ik \cdot x} \quad \Psi_{3,4} = u_{3,4}(k) e^{ik \cdot x}$$

Setzen wir das in die Dirac-Gleichung ein erhalten wir

$$\begin{aligned} (i\not{\partial} - m) \Psi_{1,2} &= (\not{k} - m) u_{1,2}(k) e^{-ik \cdot x} = 0 \\ (i\not{\partial} - m) \Psi_{3,4} &= (-\not{k} - m) u_{3,4}(k) e^{ik \cdot x} = 0 \end{aligned}$$

und dementsprechend

$$\begin{aligned} (\not{k} - m) u_{1,2}(k) &= 0 \\ (-\not{k} - m) u_{3,4}(k) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} u_{1,2}(k) &= (\not{k} + m) u_{1,2}(m, \vec{k} = 0) N' \\ u_{3,4}(k) &= (\not{k} - m) u_{3,4}(m, \vec{k} = 0) N' \end{aligned}$$

mit Normierungsfaktor N , da beim Einsetzen dieser Lösung in die oben bestimmten Gleichungen jeweils die Terme $(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = m^2 - m^2 = 0$ auftauchen.

Solution

Wir betrachten nun $u_1(k)$:

$$\begin{aligned}
 u_1(k) &= (\not{k} + m) u_{1,2}(m, \vec{k} = 0) N' \\
 &= (k_\mu \gamma^\mu + m) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} N \\
 &= N' \begin{pmatrix} (E + m) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt bestimmen wir die Normierung N mit

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1 u_1 &= 1 \\
 &= N'^2 u_1^\dagger (m, 0) \left(\gamma^{\mu\dagger} k_\mu + m \right) \gamma_0 (\not{k} + m) u_1(m, 0) \\
 &= N'^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \gamma_0 (\not{k}^2 + 2\not{k}m + m^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= N'^2 (2m^2 + 2Em)
 \end{aligned}$$

und erhalten damit $N' = 1/\sqrt{2m(E+m)}$. The solutions are

$$\begin{aligned}
 u_1 &= N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, u_2 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \\
 u_3 &= N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E-m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, u_4 = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E-m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

where the normalization factor could be $N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$.

(b) Berechnen Sie alle vier Lösungen $v_{1,2,3,4}(p)$ der Dirac-Gleichung für Anti-Teilchen

$$(\not{p} + m)v(p) = 0. \quad (2)$$

Solution

Define $(E, \vec{p}) = p^\mu$. Die Rechnung ist exakt die gleiche wie in Teilaufgabe a), lediglich das Vorzeichen des Massenterms ändert sich. Dadurch ergibt sich für die Lösung

$$v_1 = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$v_3 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E-m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, v_4 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E-m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

where the normalization factor could be $N = \sqrt{E + m}$.

- (c) Berechnen Sie die Relation zwischen $v_{1,2}(p)$ und $u_{3,4}(p)$ und bestimmen Sie den Spin der Lösungen $u_{1,2,3,4}(p)$ und $v_{1,2,3,4}(p)$.

Solution

$$v_1(p) = u_3(-p) \text{ and } v_2(p) = u_4(-p)$$

Solution

Consider the spin of the z -axis.

up: u_1, u_3, v_1, v_3 .

down: u_2, u_4, v_2, v_4 .

3 (*) Projektoren für Energie und Spin (4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\Lambda_\pm(p), \Sigma(s)],$$

wobei $\Lambda_\pm(p) = \frac{\pm \not{p} + m}{2m}$ und $\Sigma(s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}$ den Energie- bzw. Spinprojektor bezeichnet. s^μ ist der Spin-Vierervektor und p^μ der Viererimpuls.

Solution

Wir berechnen den Kommutator

$$\begin{aligned}
 [\Lambda_{\pm}(p), \Sigma(s)] &= \left[\frac{\pm \not{p} + m}{2m}, \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \right] \\
 &= \left[\frac{\pm \not{p}}{2m}, \frac{\gamma_5 \not{s}}{2} \right] \\
 &= \pm \frac{p_{\alpha} s_{\beta}}{4m} \left(\gamma^{\alpha} \gamma_5 \gamma^{\beta} + \gamma_5 \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} - 2\gamma_5 g^{\alpha\beta} \right) \\
 &= \mp \frac{\gamma_5 \not{p} \cdot s}{4m}
 \end{aligned}$$

- (b) Zerlegen Sie s^{μ} in $\xi p^{\mu} + \eta g^{\mu 0}$, indem Sie $s^2 = -1$ und $s \cdot p = 0$ benutzen. Gegen welchen Ausdruck strebt s^{μ} für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$?

Solution

Wir betrachten zuerst die Bedingung $s^2 = -1$:

$$s^2 = -1 = s_{\mu} s^{\mu} = \xi^2 m^2 + 2\xi \eta p_0 + \eta^2 g_0^0$$

Die zweite Bedingung nutzen wir um einen Ausdruck für η in Abhängigkeit von ξ zu erhalten:

$$\begin{aligned}
 s \cdot p = 0 &= \xi m^2 + \eta p_0 \\
 \rightarrow \eta &= -\xi \frac{m^2}{p_0}
 \end{aligned}$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\xi = -\frac{p_0}{m\sqrt{p_0^2 - m^2}}$$

Im Limit $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ gilt $p_0 \gg m^2$ und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \eta &\rightarrow 0 \\
 \xi &\rightarrow -\frac{1}{m}
 \end{aligned}$$

- (c) Berechnen Sie $\Lambda_{+}\Sigma(s)$ für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$.

Solution

$$\left(\frac{\pm \not{p} + m}{2m}\right) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{p}}{2}\right) = \frac{1}{4} \pm \frac{\not{p} \gamma_5 \not{p}}{4m} \pm \frac{\not{p}}{4m} + \frac{\gamma_5 \not{p}}{4}$$

Aus der vorherigen Teilaufgabe wissen wir, dass wir im Limit $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ für $s^\mu \rightarrow p^\mu/m$ erhalten. Dementsprechend betrachten wir nun

$$\frac{1}{4} \pm \frac{\not{p} \gamma_5 \not{p}}{4m^2} \pm \frac{\not{p}}{4m} + \frac{\gamma_5 \not{p}}{4m} = \left(\frac{1 \mp \gamma_5}{2}\right) \left(\frac{1 \mp \frac{\not{p}}{m}}{2}\right)$$

- (d) Zeigen Sie, dass für freie Elektron-Wellenfunktionen mit s^μ und p^μ gilt

$$u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = (\Lambda_+(p))_{\alpha\delta} (\Sigma(s))_{\delta\beta}.$$

α und β sind hier Spinorindizes.

Solution

Es gilt wenn wir den Spin-Projektor auf die Lösung der Dirac-Gleichung anwenden:

$$\begin{aligned}\Sigma(s)u(p, s) &= u(p, s), \\ \Sigma(s)u(p, -s) &= 0,\end{aligned}$$

wobei $u(p, s)$ und $u(p, -s)$ die Lösungen mit Spin up und Spin down bezeichnen sollen. Das können wir umstellen zu

$$u^\dagger(p, s)\Sigma^\dagger(s) = u^\dagger(p, s)$$

Mit dem Wissen, dass $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ und $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ finden wir $\Sigma^\dagger(s) = \gamma^0\Sigma(s)\gamma^0$ und damit

$$\bar{u}(p, s)\Sigma(s) = \bar{u}(p, s)$$

Wir betrachten nun

$$u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) = (\Sigma(s)u(p, s))_\alpha (\bar{u}(p, s)\Sigma(s))_\beta$$

Nun addieren wir in jeder Klammer eine Null indem wir den Spinor mit $-s$ hinzuügen, welcher in Kombination mit $\Sigma(s)$ Null ist:

$$u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) = (\Sigma(s)(u(p, s) + u(p, -s)))_\alpha ((\bar{u}(p, s) + \bar{u}(p, -s))\Sigma(s))_\beta$$

Das lässt uns nun die Vollständigkeit der Spinoren verwenden:

$$\sum_{r=\{s, -s\}} u(p, r)_\mu \bar{u}(p, r)_\nu = \Lambda_+(p)_{\mu\nu}$$

Einsetzen der Vollständigkeitsrelation ergibt

$$\begin{aligned}u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) &= \Sigma_{\alpha\mu}(s) ((u(p, s) + u(p, -s)))_\mu ((\bar{u}(p, s) + \bar{u}(p, -s)))_\nu \Sigma_{\nu\beta}(s) \\ &= (\Sigma(s)\Lambda_+\Sigma(s))_{\alpha\beta} \\ &= (\Lambda_+\Sigma(s)\Sigma(s))_{\alpha\beta} \\ &= (\Lambda_+\Sigma(s))_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

wobei in den letzten beiden Schritten verwendet wurde, dass der Kommutator von $\Sigma(s)$ und Λ_+ Null ist (siehe Aufgabe a und b) und die Eigenschaft, dass für Projektoren $\Sigma(s)\Sigma(s) = \Sigma(s)$ gilt.

4 Lagrange Multiplikatoren

Finden Sie Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ in

1. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
2. $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Benutzen sie die Methode der Lagrange Multiplikatoren.

Solution

Since S^1 and K_2 are compact sets and f is continuous, it attains maximum and minimum both in S^1 and in K_2 .

1. The critical points of $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ with the constraint $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ are determined through the equations $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ and $g(x, y) = 0$, i.e. by

$$\begin{cases} 2x - 1 = 2\lambda x \\ 4y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

There are two cases: either $y \neq 0$, then $\lambda = 2$ and we find the two critical points

$$P_1 = (-1/2, -\sqrt{3}/2) \quad \text{and} \quad P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2);$$

or $y = 0$, and then the critical points are

$$P_3 = (-1, 0) \quad \text{and} \quad P_4 = (1, 0)$$

(respectively for $\lambda = 3/2$ and $\lambda = 1/2$).

We observe that

$$f(-1/2, -\sqrt{3}/2) = f(-1/2, \sqrt{3}/2) = \frac{9}{4}, \quad f(-1, 0) = 2, \quad f(1, 0) = 0.$$

Hence f attains its maximum in the two critical points $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$, its minimum in the critical point $(1, 0)$.

2. The set K can be decomposed as the union of S^1 and the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Critical points in the open set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ are characterized by $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 4y) = 0$. This equation is satisfied at $(1/2, 0)$. Since $f(1/2, 0) = -1/4$, we conclude that the maximum of f is attained on K in the two points $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$, lying on the boundary of K (hence $\max_{(x,y) \in K} f(x, y) = f(-1/2, \pm\sqrt{3}/2) = 9/4$). The minimum of f , on the other hand, is attained in the point $(1/2, 0)$, in the interior of K (hence, $\min_{(x,y) \in K} f(x, y) = f(1/2, 0) = -1/4$).