Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 09**

Abgabe: Fr., 12.01.2024, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 16.01.2024

1 (*) System von zwei identischen Teilchen (5 Punkte)

Betrachten Sie ein System von zwei identische Teilchen mit (i) Spin 1/2 und (ii) Spin 1, die sich im Potential eines harmonischen Oszillators befinden. Vernachlässigen Sie dabei die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen.

- (a) Geben Sie die Symmetrieeigenschaften der Eigenvektoren der Operatoren $\vec{S}^2$ und S_z an, wobei $\vec{S}$ der Gesamtspinoperator ist.

Hinweis: Benutzen Sie dazu z.B. die tabellierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus <https://pdg.lbl.gov/2018/reviews/rpp2018-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf>.

- (b) Berechnen Sie die Energien und die Wellenfunktionen für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand. Geben Sie jeweils den Entartungsgrad an.
-

2 System von N nicht-wechselwirkenden identischen Bosonen

Betrachten Sie ein System aus N nicht-wechselwirkenden identischen Bosonen, bei dem das i -te Niveau n_i -fach besetzt sei. Die Ein-Teilchen-Zustände seien gegeben durch $|\alpha, i_\alpha\rangle$, wobei α bzw. i_α den Teilchen- bzw. Niveauindex bezeichnen. Drücken Sie den Zustandsvektor dieses Systems unter Berücksichtigung des Symmetrisierungspostulats durch die Produktzustände

$$|1, i_1; 2, i_2; \dots; N, i_N\rangle = |1, i_1\rangle \otimes \dots \otimes |N, i_N\rangle$$

aus und leiten Sie die Normierungskonstante her.

3 Ideales Gas und Carnot Prozess

Ein ideales Gas mit f Freiheitsgraden hat die innere Energie

$$U = \frac{f}{2} N k_b T,$$

mit Teilchenzahl N , Boltzmann-Konstante k_b und Temperatur T . Die Teilchenzahl N sei konstant. Die Zustandsgleichung eines idealen Gases ist gegeben mit

$$pV = N k_b T.$$

Wir betrachten nun einen Carnot-Prozess für das ideale Gas. Dieser besteht aus vier Schritten:

- Isotherme Expansion von Volumen V_1 zu Volumen V_2 bei Temperatur T_1 .
- Adiabatische Expansion von Temperatur T_1 zu Temperatur T_2 , wobei $T_2 < T_1$.
- Isotherme Kompression von Volumen V_2' zu Volumen V_1' bei Temperatur T_2 .
- Adiabatische Kompression von Temperatur T_2 zu Temperatur T_1 .

Nachdem das System diese vier Schritte durchlaufen hat befindet es sich wieder im Ausgangszustand mit Volumen V_1 und Temperatur T_1 .

- Bestimmen Sie für jeden Schritt die Arbeit, die von diesem System geleistet und die Wärme, die aufgenommen/abgegeben wird.
- Im zweiten und vierten Schritt ändert sich neben der Temperatur auch das Volumen. Das Verhältnis zwischen V_2 und V_2' sowie zwischen V_1 und V_1' kann über die Relationen in Aufgabe 4(a) gefunden werden. Bestimmen Sie damit den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses aus den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe.

4 (*) Ideales Gas (5 Punkte)

Ist die Entropie eines Systems als Funktion der extensiven Zustandsgrößen aufgrund einer mikroskopischen Theorie bekannt, so können mit Hilfe der thermodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit angegeben werden. Hier soll der umgekehrte Weg betrachtet werden: Für ein ideales Gas gilt für die innere Energie

$$U = \frac{f}{2} N k_B T,$$

sowie

$$pV = N k_B T.$$

- Zeigen Sie, dass bei einer adiabatischen Zustandsänderung ($dS = \delta Q = 0$) mit konstanter Teilchenzahl N gilt:

$$pV^{\frac{f+2}{2}} = \text{const}, \quad VT^{\frac{f}{2}} = \text{const}$$

Gehen Sie hierfür jeweils von der differentiellen Form der Beziehung

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

aus.

- Zeigen Sie, dass die Entropie des idealen Gases gegeben ist durch

$$S(U, V, N) = S_0 \frac{N}{N_0} + N k_B \left[\frac{f}{2} \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) - \frac{f+2}{2} \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) \right], \quad (1)$$

mit Integrationskonstanten S_0, U_0, V_0, N_0 .

(c) Zeigen Sie, dass sich aus Gleichung (1)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} = -\frac{\mu}{T}$$

erhalten lässt. Geben Sie damit das chemische Potential an.

Probeklausur

Am Dienstag, den 9.1.2024 findet die Probeklausur während den Tutorienzeiten statt. Die Probeklausur muss in dem Tutorium geschrieben werden, zu dem Sie sich am Anfang des Semesters eingetragen haben.

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.