

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 09**

Abgabe: Fr., 12.01.2024, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 16.01.2024

1 (*) System von zwei identischen Teilchen (5 Punkte)

Betrachten Sie ein System von zwei identische Teilchen mit (i) Spin $1/2$ und (ii) Spin 1 , die sich im Potential eines harmonischen Oszillators befinden. Vernachlässigen Sie dabei die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen.

- (a) Geben Sie die Symmetrieeigenschaften der Eigenvektoren der Operatoren $\vec{S}^2$ und S_z an, wobei $\vec{S}$ der Gesamtspinoperator ist.

Hinweis: Benutzen Sie dazu z.B. die tabellierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus <https://pdg.lbl.gov/2018/reviews/rpp2018-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf>.

Solution

- (i) The two spin-1/2 system ($1/2 \oplus 1/2$) admits irreducible tensor representation ($1 \otimes 0$), i.e. spin triplet and singlet. For the spin triplet $|\frac{1}{2}, t\rangle$, we have symmetric states

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &= |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) \\ |1, -1\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle . \end{aligned} \quad (1)$$

For the spin singlet $|\frac{1}{2}, s\rangle$, we have anti-symmetric state

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) . \quad (2)$$

The coefficients in front of the $|\uparrow\rangle |\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle$ states can be read from Clebsch-Gordan table.

Solution

(ii) The two spin-1 system ($1 \oplus 1$) admits irreducible tensor representation ($2 \otimes 1 \otimes 0$). According to the Clebsch-Gordan table, we have the symmetric states for the spin quintuplet $|1, q\rangle$:

$$\begin{aligned} |2, +2\rangle &= |1, +1\rangle |1, +1\rangle \\ |2, +1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, +1\rangle |1, 0\rangle + |1, 0\rangle |1, +1\rangle) \\ |2, 0\rangle &= \dots, \quad |2, -1\rangle = \dots, \quad |2, -2\rangle = \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

and anti-symmetric states for spin triplet $|1, t\rangle$:

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, +1\rangle |1, 0\rangle - |1, 0\rangle |1, +1\rangle) \\ |1, 0\rangle &= \dots, \quad |1, -1\rangle = \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

and symmetric state for spin singlet $|1, s\rangle$:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1, +1\rangle |1, -1\rangle - |1, 0\rangle |1, 0\rangle + |1, -1\rangle |1, +1\rangle) . \quad (5)$$

Note that the kets on the left hand side denotes the states in tensor representation.

- (b) Berechnen Sie die Energien und die Wellenfunktionen für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand. Geben Sie jeweils den Entartungsgrad an.

Solution

The spatial part of wave functions are described by the harmonic oscillators. The ground state $|0, 0\rangle_{\text{HO}}$ is symmetric with energy $\hbar\omega$, the first excited states contains both symmetric and anti-symmetric parts:

$$\begin{aligned} |1, +\rangle_{\text{HO}} &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle_{\text{HO}} + |0, 1\rangle_{\text{HO}}) \quad \text{is symmetric with energy } 2\hbar\omega \\ |1, -\rangle_{\text{HO}} &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle_{\text{HO}} - |0, 1\rangle_{\text{HO}}) \quad \text{is anti-symmetric with energy } 2\hbar\omega \end{aligned} \quad (6)$$

(i) The two spin-1/2 system obey fermionic statistics, hence its total wave functions are anti-symmetric. The ground state is

$$|0, 0\rangle_{\text{HO}} \cdot \left| \frac{1}{2}, s \right\rangle, \quad (7)$$

with energy $\hbar\omega$, and the first excited state is

$$|1, +\rangle_{\text{HO}} \cdot \left| \frac{1}{2}, s \right\rangle, \quad |1, -\rangle_{\text{HO}} \cdot \left| \frac{1}{2}, t \right\rangle \quad (8)$$

with energy $2\hbar\omega$ (4-degenerate states).

Solution

(ii) The two spin-1 system obey bosonic statistics, hence its total wave functions are symmetric. The ground state is

$$|0, 0\rangle_{\text{HO}} \cdot |1, q\rangle, \quad |0, 0\rangle_{\text{HO}} \cdot |1, s\rangle \quad (9)$$

with energy $\hbar\omega$ (6-degenerate states), and the first excited state is

$$|1, +\rangle_{\text{HO}} \cdot |1, q\rangle, \quad |1, +\rangle_{\text{HO}} \cdot |1, s\rangle, \quad |1, -\rangle_{\text{HO}} \cdot |1, t\rangle \quad (10)$$

with energy $2\hbar\omega$ (9-degenerate states).

2 System von N nicht-wechselwirkenden identischen Bosonen

Betrachten Sie ein System aus N nicht-wechselwirkenden identischen Bosonen, bei dem das i -te Niveau n_i -fach besetzt sei. Die Ein-Teilchen-Zustände seien gegeben durch $|\alpha, i_\alpha\rangle$, wobei α bzw. i_α den Teilchen- bzw. Niveauindex bezeichnen. Drücken Sie den Zustandsvektor dieses Systems unter Berücksichtigung des Symmetrisierungspostulats durch die Produktzustände

$$|1, i_1; 2, i_2; \dots; N, i_N\rangle = |1, i_1\rangle \otimes \dots \otimes |N, i_N\rangle$$

aus und leiten Sie die Normierungskonstante her.

Solution

Suppose we have the n_i -fold (degenerate) occupations that $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$, then we have $\frac{N!}{n_1! n_2! \dots}$ possibilities to distribute the N bosons. Any distinct state can be described as $|1, i_1\rangle \otimes |2, i_2\rangle \dots |N, i_N\rangle$. Then the wave function is

$$\psi_B = \sqrt{\frac{n_1! n_2! \dots}{N!}} \sum |1, i_1\rangle \otimes |2, i_2\rangle \dots |N, i_N\rangle, \quad (11)$$

where the summation sums over all possible distinct permutations of the level indices $i_1, i_2, \dots, i_N$.

3 Ideales Gas und Carnot Prozess

Ein ideales Gas mit f Freiheitsgraden hat die innere Energie

$$U = \frac{f}{2} N k_b T,$$

mit Teilchenzahl N , Boltzmann-Konstante k_b und Temperatur T . Die Teilchenzahl N sei konstant. Die Zustandsgleichung eines idealen Gases ist gegeben mit

$$pV = N k_b T.$$

Wir betrachten nun einen Carnot-Prozess für das ideale Gas. Dieser besteht aus vier Schritten:

- Isotherme Expansion von Volumen V_1 zu Volumen V_2 bei Temperatur T_1 .
- Adiabatische Expansion von Temperatur T_1 zu Temperatur T_2 , wobei $T_2 < T_1$.
- Isotherme Kompression von Volumen V_2' zu Volumen V_1' bei Temperatur T_2 .
- Adiabatische Kompression von Temperatur T_2 zu Temperatur T_1 .

Nachdem das System diese vier Schritte durchlaufen hat befindet es sich wieder im Ausgangszustand mit Volumen V_1 und Temperatur T_1 .

- (a) Bestimmen Sie für jeden Schritt die Arbeit, die von diesem System geleistet und die Wärme, die aufgenommen/abgegeben wird.

Solution

- Isotherme Expansion

Die Arbeit, die das System verrichtet kann berechnet werden über

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p(V, T_1) dV = Nk_B T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = Nk_B T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Da die innere Energie des Gases nicht vom Volumen abhängt, wird diese nicht geändert und es gilt demnach

$$Q_1 = W_1 = Nk_B T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

- Adiabatische Expansion von Temperatur T_1 zu Temperatur T_2 , wobei $T_2 < T_1$.
Adiabatische Prozesse haben die Eigenschaft $\delta Q = 0$. Die Arbeit des Systems entspricht also der Änderung der inneren Energie

$$W_2 = \frac{f}{2} Nk_B (T_1 - T_2)$$

- Isotherme Kompression von Volumen V_2' zu Volumen V_1' bei Temperatur T_2 .
Analog zu Schritt 1 ergibt sich hier

$$Q_3 = W_3 = Nk_B T_2 \ln \left(\frac{V_1'}{V_2'} \right)$$

- Adiabatische Kompression von Temperatur T_2 zu Temperatur T_1 .
Es gilt wieder $\delta Q = 0$ und mit analoger Rechnung wie in Schritt 2

$$W_4 = \frac{f}{2} Nk_B (T_2 - T_1)$$

- (b) Im zweiten und vierten Schritt ändert sich neben der Temperatur auch das Volumen. Das Verhältnis zwischen V_2 und V_2' sowie zwischen V_1 und V_1' kann über die Relationen in Aufgabe 4(a) gefunden werden. Bestimmen Sie damit den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses aus den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe.

Solution

Es gilt

$$V_2' = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{f/2}, V_1' = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{f/2}.$$

Der Carnot-Wirkungsgrad gibt das Verhältnis von abgegebener Arbeit zur zugeführten Wärme an. Die zugeführte Wärme entspricht Q_3

$$\eta = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{Q_3}$$

Es gilt $W_2 = -W_4$ und somit

$$\eta = \frac{W_1 + W_3}{Q_3} = \frac{Nk_b T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + Nk_B T_2 \ln \left(\frac{V_1'}{V_2'} \right)}{Nk_b T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

4 (*) Ideales Gas (5 Punkte)

Ist die Entropie eines Systems als Funktion der extensiven Zustandsgrößen aufgrund einer mikroskopischen Theorie bekannt, so können mit Hilfe der thermodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit angegeben werden. Hier soll der umgekehrte Weg betrachtet werden: Für ein ideales Gas gilt für die innere Energie

$$U = \frac{f}{2} N k_b T,$$

sowie

$$pV = N k_b T.$$

- (a) Zeigen Sie, dass bei einer adiabatischen Zustandsänderung ($dS = \delta Q = 0$) mit konstanter Teilchenzahl N gilt:

$$pV^{\frac{f+2}{f}} = \text{const}, \quad VT^{\frac{f}{2}} = \text{const}$$

Gehen Sie hierfür jeweils von der differentiellen Form der Beziehung

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

aus.

Solution

Wir betrachten den Fall konstanter Teilchenzahl:

$$dN = 0$$

Einsetzen von dU liefert damit

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV = \frac{f}{2}Nk_B \frac{dT}{T} + \frac{p}{T}dV$$

Im nächsten Schritt ersetzen wir dV über die Zustandsgleichung mit

$$dV = \frac{Nk_B}{p}dT - \frac{Nk_B T}{p^2}dp$$

und erhalten damit

$$dS = \frac{f}{2}Nk_B \frac{dT}{T} + Nk_B \frac{dT}{T} - \frac{Nk_B}{p}dp = 0$$

Umstellen und Integrieren dieser Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{2} + 1\right) \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T'} &= \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} \\ \rightarrow \left(\frac{T}{T_0}\right)^{f/2+1} &= \frac{p}{p_0} \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{T^{f/2+1}}{p} = \text{const}$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich durch Einsetzen der Zustandsgleichung

$$\frac{T^{f/2+1}V}{Nk_B T} = \text{const} \rightarrow T^{f/2}V = \text{const}$$

und daraus

$$T^{f/2}V = \text{const} \rightarrow TV^{2/f} = \text{const} \rightarrow \frac{pV^{1+2/f}}{Nk_B} = \text{const} \rightarrow pV^{1+2/f} = \text{const}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Entropie des idealen Gases gegeben ist durch

$$S(U, V, N) = S_0 \frac{N}{N_0} + Nk_B \left[\frac{f}{2} \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) - \frac{f+2}{2} \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) \right], \quad (12)$$

mit Integrationskonstanten S_0, U_0, V_0, N_0 .

Solution

Wir betrachten anstatt

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

$$ds = \frac{1}{T}du + \frac{p}{T}dv,$$

was aus obiger Gleichung folgt und wobei $s = S/N, u = U/N, v = V/N$. Integrieren liefert

$$s - s_0 = \frac{f}{2}k_b \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) + k_b \ln\left(\frac{v}{v_0}\right),$$

beziehungsweise

$$\frac{S}{N} - \frac{S_0}{N_0} = \frac{f}{2}k_b \ln\left(\frac{U}{U_0} \frac{N_0}{N}\right) + k_b \ln\left(\frac{V}{V_0} \frac{N_0}{N}\right).$$

Umstellen nach S liefert das gewünschte Ergebnis

$$S(U, V, N) = S_0 \frac{N}{N_0} + Nk_B \left[\frac{f}{2} \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) - \frac{f+2}{2} \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \right]$$

(c) Zeigen Sie, dass sich aus Gleichung (12)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} = -\frac{\mu}{T}$$

erhalten lässt. Geben Sie damit das chemische Potential an.

Solution

In der vorherigen Teilaufgabe haben wir den Ausdruck für die Entropie hergeleitet. Bilden wir hier die Ableitungen, erhalten wir

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{Nk_b f}{2U} = \frac{1}{T},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{Nk_b}{V} = \frac{p}{T},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} = -\frac{f+2}{2}k_b + \frac{S_0}{N_0} + k_B \left[\frac{f}{2} \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) - \frac{f+2}{2} \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \right]$$

Aus der letzten Relation ergibt sich direkt das chemische Potential, da

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} = -\frac{\mu}{T}$$

Probeklausur

Am Dienstag, den 9.1.2024 findet die Probeklausur während den Tutorienzeiten statt. Die Probeklausur muss in dem Tutorium geschrieben werden, zu dem Sie sich am Anfang des Semesters eingetragen haben.

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.