

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 10**

Abgabe: Fr., 19.01.2024, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 23.01.2024

1 Legendre-Transformation

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve an, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U -Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ wird als Legendre-Transformierte von $U(S)$ bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

- (a) Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch $dU(S) = T(S)dS$ und $dF(T) = -S(T)dT$ gegeben sind.
 - (b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S , negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichen Vorzeichen der Krümmungen. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U / \partial S|_V$ sowie $-P = \partial U / \partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S, V)$ nach S und $P(S, V)$ nach V definiert Funktionen $S(T, V)$ und $V(S, P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T, V)$ und $H(S, P)$.
-

2 (*) Wahrscheinlichkeitsdichte von Zufallsfunktionen (3 Punkte)

$\vec{X}$ beschreibe einen Satz von Zufallsvariablen X_i und F sei eine (beliebige) Funktion. Dann ist $F(\vec{X})$ eine Zufallsvariable, die die Werte f annehmen kann und die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_F(f)$ hat.

Zeigen Sie, dass $w_F(f)$ aus $w(\vec{x})$ berechnet werden kann und geben Sie $w_F(f)$ explizit an.

3 (*) Phasenraumdichte und Liouville-Gleichung (7 Punkte)

1. Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. Skizzieren Sie den Phasenraum $(\{x, p\})$ für eine gegebene Amplitude A_0 . Wie sieht der Phasenraum für Amplituden $A_1 > A_0$ und $A_2 < A_0$ aus? Diskutieren Sie den Fall, dass ein Ensemble von identischen harmonischen Oszillatoren vorliegt, die (a) unterschiedliche Amplituden und (b) unterschiedliche Frequenzen haben.

2. Betrachten Sie eine rotierende Scheibe mit Trägheitsmoment I . Es bietet sich an, das System mit den Koordinaten $\{\varphi, p_\varphi\}$ zu beschreiben, wobei φ der Drehwinkel und p_φ der konjugierte kanonische Impuls ist. Dann ist die Hamiltonfunktion gegeben durch $H = p_\varphi^2/(2I)$.

- (a) Stellen Sie die Liouville-Gleichung für die Phasenraumdichte $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$ auf. Sie erhalten eine Gleichung, die die zeitliche Ableitung von ρ und die Ableitung nach φ in Beziehung setzt.
- (b) Verwenden Sie die doppelte Fourier-Transformation

$$\rho = \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i\omega t} e^{-ik\varphi},$$

um aus der Differentialgleichung eine algebraische Gleichung zu erhalten. Daraus können Sie die Dispersionsrelation ableiten. Wie lautet diese?

- (c) Bei der Rücktransformation von k nach φ

$$\rho = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i(\omega t - k\varphi)}$$

können Sie annehmen, dass $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 = \text{const.}$ ist. Außerdem sollten Sie die Dispersionsrelation verwenden. Welchen Ausdruck erhalten Sie für ρ ?

- (d) Interpretieren Sie das Ergebnis aus (c) in der $\varphi - p_\varphi$ -Ebene falls $\tilde{\rho}_0$ nur für $p_\varphi \in [L_0 - \Delta L, L_0 + \Delta L]$ von Null verschieden ist und dann den Wert $\tilde{\rho}_0 = 1/(2\Delta L)$ annimmt.
- (e) Verwenden Sie $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$, um den Mittelwert von φ und die Standardabweichung zu berechnen. Diskutieren Sie die Abhängigkeiten von t .