Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 10**

Abgabe: Fr., 19.01.2024, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 23.01.2024

---

1 Legendre-Transformation

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve an, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = \mathrm{d}U/\mathrm{d}S$ sowie den U-Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion F(T) wird als Legendre-Transformierte von U(S) bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

(a) Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch $\mathrm{d}U(S) = T(S)\mathrm{d}S$ und $\mathrm{d}F(T) = -S(T)\mathrm{d}T$ gegeben sind.

solution

Es gilt

$$F = F(T) = U(S(T)) - S(T)T$$

und dementsprecchend

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial U}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial T}\mathrm{d}T - \frac{\partial S}{\partial T}T\mathrm{d}T - S(T)\mathrm{d}T$$

Da $T = \partial U/\partial S$ die Steigung der Funktion $U(S)$ ist, heben sich die ersten beiden Terme weg und wir erhalten

$$\mathrm{d}F(T) = -S(T)\mathrm{d}T$$

(b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S, negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichen Vorzeichen der Krümmungen. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U/\partial S|_V$ sowie $-P = \partial U/\partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S, V)$ nach S und $P(S, V)$ nach V definiert Funktionen $S(T, V)$ und $V(S, P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T, V)$ und $H(S, P)$.

solution

Für die innere Energie $U(S,V)$ erhalten wir

$$\mathrm{d}U(S,V) = T(S,V)\mathrm{d}S - P(S,V)\mathrm{d}V$$

Die Legendretransformation um die freie Energie $F(T,V)$ zu erhalten ergibt sich mit

$$F(T,V) = U(S(T,V),V) - S(T,V)T$$

und damit das Differential

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(T,V) &= T\mathrm{d}S - P(S(T,V),V)\mathrm{d}V - S(T,V)\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S \\ &= -S(T,V)\mathrm{d}T - P(S(T,V),V)\mathrm{d}V\end{aligned}$$

Für die Enthalpie erhalten wir

$$H(S,P) = U(S,V(S,P)) + V(S,P)P$$

und damit das Differential

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H(S,P) &= T(S,V(S,P))\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + V(S,P)\mathrm{d}P + P\mathrm{d}V \\ &= T(S,V(S,P))\mathrm{d}S + V(S,P)\mathrm{d}P\end{aligned}$$

---

2 (*) Wahrscheinlichkeitsdichte von Zufallsfunktionen (3 Punkte)

$\vec{X}$ beschreibe einen Satz von Zufallsvariablen X_i und F sei eine (beliebige) Funktion. Dann ist $F(\vec{X})$ eine Zufallsvariable, die die Werte f annehmen kann und die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_F(f)$ hat.

Zeigen Sie, dass $w_F(f)$ aus $w(\vec{x})$ berechnet werden kann und geben Sie $w_F(f)$ explizit an.

solution

Zu zeigen ist (siehe Vorlesung)

$$\omega_F(f) = \langle \delta(F(\vec{x}) - f) \rangle$$

Die cahrakteristische Funktion ist gegeben mit

$$\chi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-ikx} \omega(x)$$

und dementsprechend

$$\omega_F(f) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \; e^{ikf} \chi(k) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \; e^{ikf} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \langle F^n \rangle$$

Wir setzen für $\langle F^n \rangle$ den Erwartungswert ein

$$\langle F^n \rangle = \int \mathrm{d}\vec{x} \; \omega(\vec{x}) \left(F(\vec{x}) \right)^n$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\omega_F(f) &= \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \; e^{ikf} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \langle F^n \rangle \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x} \; \omega(\vec{x}) \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \; e^{ikf} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \left(F(\vec{x}) \right)^n \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x} \; \omega(\vec{x}) \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \; e^{ikf - ikF(\vec{x})} \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x} \; \omega(\vec{x}) \delta \left(F(\vec{x}) - f \right) \\
&= \langle \delta \left(F(\vec{x}) - f \right) \rangle
\end{aligned}$$

---

3 (*) Phasenraumdichte und Liouville-Gleichung (7 Punkte)

1. Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. Skizzieren Sie den Phasenraum ($\{x, p\}$) für eine gegebene Amplitude A_0. Wie sieht der Phasenraum für Amplituden $A_1 > A_0$ und $A_2 < A_0$ aus? Diskutieren Sie den Fall, dass ein Ensemble von identischen harmonischen Oszillatoren vorliegt, die (a) unterschiedliche Amplituden und (b) unterschiedliche Frequenzen haben.

solution

Der Phasenraum für einen harmonischen Oszillator ist eine Ellipse im Koordinatensystem $\{x, p\}$. Gilt für die Koordinate x beispielsweise

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t)$$

gilt für den Impuls

$$p(t) = mv(t) = m\dot{x}(t) = mA_0\omega \cos(\omega t)$$

und somit ergibt sich eine Ellipse. Für $A_1, A_2 \neq A_0$ ändert sich folglich die Amplitude von Koorddinate und Impuls und somit die Skalierung der Ellipse. Für unterschiedliche Frequenzen ω ändert sich nur die Amplitude des Impulses. Die Ellipse wird also gestaucht beziehungsweise gestreckt.

2. Betrachten Sie eine rotierende Scheibe mit Trägheitsmoment I. Es bietet sich an, das System mit den Koordinaten $\{\varphi, p_\varphi\}$ zu beschreiben, wobei φ der Drehwinkel und p_φ der konjugierte kanonische Impuls ist. Dann ist die Hamiltonfunktion gegeben durch $H = p_\varphi^2/(2I)$.

(a) Stellen Sie die Liouville-Gleichung für die Phasenraumdichte $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$ auf. Sie erhalten eine Gleichung, die die zeitliche Ableitung von ρ und die Ableitung nach φ in Beziehung setzt.

solution

Wir erhalten für die Liouville Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\} &= \frac{\partial H}{\partial \varphi}\frac{\partial \rho}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \\ &= -\frac{p_\varphi}{I}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

(b) Verwenden Sie die doppelte Fourier-Transformation

$$\rho = \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}k\, \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega)\, e^{i\omega t} e^{-ik\varphi}\,,$$

um aus der Differentialgleichung eine algebraische Gleichung zu erhalten. Daraus können Sie die Dispersionsrelation ableiten. Wie lautet diese?

solution

Setzen wir die gegebene Relation für ρ in die Gleichung die wir in der ersten Teilaufgabe erhalten haben ein, erhalten wir die Dispersionsrelation

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}k\, \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega)\, i\omega e^{i\omega t} e^{-ik\varphi} &= -\frac{p_\varphi}{I}\int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}k\, \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega)\, e^{i\omega t}(-ik)e^{-ik\varphi} \\ \rightarrow \omega &= -k\frac{p_\varphi}{I} \end{aligned}$$

(c) Bei der Rücktransformation von k nach φ

$$\rho = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega)e^{i(\omega t - k\varphi)}$$

können Sie annehmen, dass $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 = \text{const.}$ ist. Außerdem sollten Sie die Dispersionsrelation verwenden. Welchen Ausdruck eralten Sie für ρ?

solution

Wir setzen die Dispersionsrelation ein und ersetzen $\tilde{\rho}$ mit $\tilde{\rho}_0$. Damit ergibt sich

$$\rho = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i(\omega t - k\varphi)} = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{\rho}_0 e^{-ik(\frac{p_\varphi}{I} t + \varphi)} = \tilde{\rho}_0 \delta \left[\frac{p_\varphi t}{I} + \varphi \right],$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} e^{-ikx} = \delta(x)$$

(d) Interpretieren Sie das Ergebnis aus (c) in der $\varphi - p_\varphi$-Ebene falls $\tilde{\rho}_0$ nur für $p_\varphi \in [L_0 - \Delta L, L_0 + \Delta L]$ von Null verschieden ist und dann den Wert $\tilde{\rho}_0 = 1/(2\Delta L)$ annimmt.

solution

In diesem Fall ergibt sich

$$\rho = \frac{1}{2\Delta L} \delta \left[\frac{p_\varphi t}{I} + \varphi \right]$$

in dem Bereich, in dem ρ nicht verschwindet. Die Phasenraumdichte beschreibt damit eine gerade Linie, die sich in Abhängigkeit der Zeit bewegt. Bei $t = 0$ liegt die Linie genau auf der p_φ-Achse. Für $t \neq 0$ ergibt sich für dem Argument der Delta-Funktion die Bedingung $p_\varphi = -\varphi \frac{I}{t}$. Für diese Bedingung ist die Delta-Funktion ungleich Null. Der obere Endpunkt der Gerade verschiebt sich also in negative und der untere in positive φ-Richtung, die Gerade kippt also.

(e) Verwenden Sie $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$, um den Mittelwert von φ und die Standardabweichung zu berechnen. Diskutieren Sie die Abhängigkeiten von t.

solution

Wir berechnen zuerst den Mittelwert von φ:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi\rangle &= \frac{1}{2\Delta L}\int_{L_0-\Delta L}^{L_0+\Delta L} \mathrm{d}p_\varphi \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varphi\delta\left[\frac{p_\varphi t}{I}+\varphi\right]\varphi &(1)\\
&= \frac{1}{2\Delta L}\int_{L_0-\Delta L}^{L_0+\Delta L} \mathrm{d}p_\varphi \left(-\frac{p_\varphi t}{I}\right) &(2)\\
&= \frac{1}{4\Delta L}\left(-\frac{t}{I}\right)\left[(L_0+\Delta L)^2-(L_0-\Delta L)^2\right] &(3)\\
&= \frac{1}{4\Delta L}\left(-\frac{t}{I}\right)4L_0\Delta L &(4)\\
&= L_0\left(-\frac{t}{I}\right) &(5)
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\langle\varphi^2\rangle = \frac{t^2}{3I^2}\left(3L_0^2+\Delta L^2\right)$$

und somit für die Standardabweichung

$$\sqrt{(\langle\varphi\rangle^2-\langle\varphi^2\rangle)} = \frac{\Delta L t}{\sqrt{3}I}$$