Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 11**

Abgabe: Fr., 26.01.2024, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 30.01.2024

1 Zentraler Grenzwertsatz

Es sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X_n}(x) = \frac{n^x e^{-n}}{x!} \quad \text{mit } x = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass sich die Verteilung der Größe

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

im Limit $n \rightarrow \infty$ der einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ annähert.

Hinweis: Leiten Sie die Momenterzeugende Funktion $M_{X_n}(t)$ von X_n her, indem Sie die Gleichung

$$M_{X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_n^k]}{k!} t^k,$$

benutzen und zeigen Sie danach, dass sich $M_{(X_n - n)/\sqrt{n}}(t)$ im betrachteten Limit der Momenterzeugenden Funktion der Normalverteilung annähert. $\mathbb{E}[\dots]$ beschreibt hier den Erwartungswert.

2 Oberfläche der Einheitskugel

Berechnen Sie die Oberfläche der Einheitskugel in d Dimensionen. Kontrollieren Sie Ihr Resultat für $d = 1, 2, 3$.

3 (*) Harmonischer Oszillator: Mikrokanonischer Zustand (6 Punkte)

1. Betrachten Sie N gleichartige harmonische Oszillatoren, die nicht miteinander wechselwirken. Der Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^N \hbar\omega \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right),$$

wobei $a_i^\dagger$ und a_i Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind. Berechnen Sie $\Omega(E)$ mit

$$\Omega(E) = \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} \delta \left(E - \hbar\omega \sum_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right) \right).$$

- (i) Schreiben Sie die δ -Funktion als ein Integral über die Exponentialfunktion.
- (ii) Die Summe im Exponenten kann als Produkt von Exponentialfunktionen geschrieben werden.
- (iii) Erkennen Sie nun, dass $\Omega(E)$ ausgedrückt ist als ein Produkt von N identischen Termen.
- (iv) Sie erhalten ein Integral über einen Parameter k mit dem Integranden $\exp(Ng(k))$, wobei $g(k) = ikE/N - \log(2i \sin(k\hbar\omega/2))$.
- (v) Nähern Sie dieses Integral, indem Sie $g(k)$ um das Maximum bei $k = k_0$ entwickeln und nach dem zweiten Term abbrechen.
- (vi) Für das resultierende Gauss-Integral gibt es eine geschlossene Lösung. Geben Sie $\Omega(E)$ an.

2. Verwenden Sie das Result für $\Omega(E)$, um die Entropie und schließlich die Temperatur zu erhalten.

4 (*) Mischung von idealen Gasen (4 Punkte)

Der Erwartungswert eines Operators O berechnet sich über

$$\langle O \rangle = \int \frac{d^{3N}p d^{3N}q}{(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{1}{N!} \rho O,$$

wobei ρ die Dichtematrix ist. Dabei wurde der Faktor $1/N!$ aufgrund der Ununterscheidbarkeit der Teilchen eingeführt. Überzeugen Sie sich davon (vgl. Vorlesung), dass auf der Basis obiger Gleichung die Entropie eines idealen Gases gegen ist durch

$$S = kN \log(V/N) + \dots,$$

wobei Terme, die hier nicht von Interesse sind, nicht explizit angegeben sind. Falls der Faktor $1/N!$ nicht vorhanden ist erhält man für die Entropie

$$S_{\text{kl}} = kN \log(V) + \dots$$

Betrachten Sie nun ein isoliertes System, das in zwei gleich große Kammern mit Volumen V aufgeteilt ist. Diese sind durch eine Trennwand separiert. In jedem befindet sich ein ideales Gas. Die Trennwand wird nun entfernt, so dass eine quasistatische (aber irreversible) Durchmischung stattfindet. Berechnen Sie die Änderung der Entropie für folgende Fälle

- (a) In beiden Kammern befinden sich unterschiedliche ideale Gase.
- (b) In beiden Kammern befinden sich das gleiche ideale Gase.

Verwenden Sie sowohl S als auch S_{kl} . Interpretieren Sie das Ergebnis.