Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 12**

Abgabe: Fr., 02.02.2024, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 06.02.2024

---

1 Entropie eines Spinsystems

Betrachten Sie ein System von N Spin-1/2-Teilchen ohne Wechselwirkung untereinander. Berechnen Sie die Entropie im kanonischen Ensemble mit Hilfe der Formel $S_{kan} = -k\sum_{i=1} w_i \ln w_i$ und vergleichen Sie mit $S = -(\partial F/\partial T)_H$ (vgl. Vorlesung).

---

2 System von Oszillatoren

Wir betrachten ein System von N quantenmechanischen Ozsillatoren, mit Frequenzen ω_i ($i = 1, \ldots, N$). Die Energieniveaus eines Oszillators sind gegeben durch $(n+1/2)\hbar\omega_i$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

1. Berechnen Sie die Zustandssumme für dieses System im kanonischen Ensemble.
2. Berechnen Sie die freie Energie, die mittlere Energie und die spezifische Wärme.

---

3 (*) Ideales Gas (5 Punkte)

Das ideale Gas beschreibt ein System aus N identischen, nicht wechselwirkenden Teilchen in einem Volumen V. Wir unterscheiden zwischen zwei Arten von idealem Gas, dem Fermi- und Bose-Gas. Zusätzlich lässt sich ein nützliches mathematisches Modell definieren, das sogenannte Boltzmann-Gas oder ideales Gas.

(a) Impuls und Position von klassischen Teilchen sind kontinuierlich und scharf messbar. Die kanonische Zustandssumme des Boltzmann-Gases hat die Form

$$Z_N \propto \int \frac{1}{N!} e^{-\beta H(x,p)} \mathrm{d}^{3N}x\, \mathrm{d}^{3N}p. \tag{1}$$

Führen Sie einen Parameter (bzw. ein Integral-Maß) h ein um die Zustandssumme dimensionslos zu machen. Leiten Sie die Zustandsgleichung her und bestimmen Sie die Entropie. Zeigen Sie, dass die Entropie von der Wahl von h abhängt. Reskalieren sie h mit dem Faktor α.

(b) Bestimmen Sie Z_N über

$$Z_N = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right]. \tag{2}$$

Hierbei ist H der Hamilton-Operator eines freien Teilchens. Zeigen Sie, dass der führende Term von Z_N im thermodynamischen Limit bei hohen Temperaturen mit dem klassischen Ergebnis der vorherigen Aufgabe übereinstimmt. Benutzen Sie dafür das Maß $2\pi\hbar$ für $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p$.

---

4 (*) Spinsystem im Magnetfeld (5 Punkte)

Wir betrachten ein System von Spins in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der Hamilton-Operator eines Spins ist: $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\hbar\sigma_z \mu B/2$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Hälfte des Spins in Richtung $+x$ polarisiert, die andere Hälfte in Richtung $+y$.

1. Geben Sie den Dichteoperator $\rho(t)$ des Systems bei $t = 0$ an.
2. Welches sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren dieses Operators?
3. Berechnen Sie $\rho(t)$ und $\langle S_x \rangle(t)$.

---

5 Zustandsdichte

Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen in einem D-dimensionalen Kasten der Kantenlänge L, für das die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon(p)$ besteht. Die Zustandsdichte $\mathcal{N}(\epsilon)$ ist definiert als

$$\mathcal{N}(\epsilon) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int \mathrm{d}^D p \, \delta(\epsilon - \epsilon(p)) \, .$$

Es sei nun $\epsilon(p) = \alpha p^n$. Bestimmen Sie $\mathcal{N}(\epsilon)$ für $D = 1, 2, 3$. Geben Sie insbesondere die Ergebnisse für Elektronen ($\epsilon(p) = |\vec{p}|^2/(2m)$) und Photonen ($\epsilon(p) = c\vec{p}$) an.