Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 13**

Abgabe: Fr., 09.02.2024, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 13.02.2024

1 Ideales Bose Gas in zwei Dimensionen

- (i) Geben Sie die großkanonische Zustandssumme $Z_G(\mu, V, T)$ für ein zweidimensionales Bose Gas an.
- (ii) Bestimmen Sie die mittlere Anzahl der Teilchen pro Flächeneinheit als Funktion von μ und T . Hierbei können Sie für die Energie der einzelnen Bosonen

$$\epsilon_\lambda = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2)$$

verwenden.

- (iii) Zeigen Sie, dass in diesem Beispiel keine Bose-Einstein-Kondensation auftritt.
-

2 (*) N anharmonische Oszillatoren (5 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der klassischen Statistik die mittlere Energie und den Beitrag zur spezifischen Wärme im Grenzfall kleiner Temperaturen für ein System von N unabhängigen anharmonischen Oszillatoren mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} + \gamma \vec{r}^4, \quad \gamma > 0,$$

wobei der letzte Term als kleine Störung aufgefasst werden kann.

3 (*) Kanonische Verteilung für magnetische Spins (5 Punkte)

Ein magnetisches System habe Energieaustausch mit einem Wärmebad. Zusätzlich sei seine Magnetisierung an die des Wärmebads gekoppelt, sodass die Mittelwerte von Energie, $\langle E \rangle$, und Magnetisierung, $\langle M \rangle$, des Systems vorgegeben sind. Es soll ein Ensemble mit N solchen Systemen betrachtet werden. E_r und M_s seien die mögliche Gesamtenergie bzw. Magnetisierung der einzelnen Systeme und $n_{r,s}$ ist die Zahl der Systeme in dem Ensemble, die Energie E_r und Magnetisierung M_s haben.

- (i) Geben Sie die 3 Zwangsbedingungen an.

- (ii) Zeigen Sie, dass die Besetzungswahrscheinlichkeit $\langle n_{r,s} \rangle / N$ gegeben ist durch

$$\frac{\langle n_{r,s} \rangle}{N} = C e^{\frac{1}{k}(\beta E_r + \gamma M_s)}.$$

Benutzen Sie hierfür die Methode der Lagrangemultiplikatoren um die Zwangsbedingungen aus der ersten Teilaufgabe einzubinden. Im zu zeigenden Ergebnis sind β und γ zwei der damit eingeführten Lagrangemultiplikatoren. Geben Sie die Konstante C an.

- (iii) $\Omega(E, M)$ sei der mikrokanonische Entartungsgrad. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(E, M)$, das System in einem Zustand der Energie E und der Magnetisierung M zu finden?
- (iv) Geben Sie die Bedingungsgleichungen für die wahrscheinlichste Energie ($\bar{E}$) bzw. Magnetisierung ($\bar{M}$) ($P(E, M)$ maximal!) an. Bestimmen Sie das Differential der inneren Energie $dE = d\langle E \rangle = d\bar{E}$ für ein System mit Magnetisierung. Nutzen Sie nun die Beziehung zwischen der Entropie S und $\Omega(E, M)$ aus, um Ω zu eliminieren und so die Lagrange-Parameter β und γ zu bestimmen.
- (v) Wie hängt in diesem Fall die freie Energie $F = E - TS - HM$ mit der kanonischen Zustandssumme Z_K zusammen?

4 Dichteoperator eines freien Teilchens

Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle \vec{x}' | \rho | \vec{x} \rangle$ des Dichteoperators $\rho = e^{-\beta H} / \text{Sp}(e^{-\beta H})$ für ein freies Teilchen ($H = \vec{p}^2 / (2m)$).

Hinweis: Nehmen Sie bei der Berechnung der Spur an, dass sich das Teilchen in einem Kasten mit Volumen V befindet. Sie dürfen folgendes Integral verwenden:

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-\beta \hbar^2 \vec{k}^2 / (2m) + i \vec{k} \vec{x}} = \frac{1}{\lambda^3} e^{-\frac{\pi x^2}{\lambda^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi \beta \hbar^2}{m}},$$