Moderne Theoretische Physik II (WS 2024/25)

Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian Reich

Lösungen zu Blatt 1
Besprechung 05.11.2024

---

1. Wechselwirkungsbild (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für einen Operator $A_I(t)$ im Wechselwirkungsbild gilt

$$i\hbar \frac{dA_I}{dt} = [A_I, H_0] + i\hbar \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_I . \qquad \text{(2 Punkte)} \tag{1}$$

b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert einer Observablen $\langle A \rangle (t)$ unabhängig davon ist, ob im Schrödinger-, Heisenberg- oder Wechselwirkungsbild gearbeitet wird. (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Bezeichnet $A(t)$ den Operator im Schrödingerbild (mit einer expliziten Zeitabhängigkeit) und $H(t) = H_0 + V(t)$ den Hamiltonian, so ist $A_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}A(t)e^{-iH_0t/\hbar}$. Ableiten ergibt nach der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_I(t) = &\underbrace{\frac{i}{\hbar}H_0 e^{iH_0t/\hbar}A(t)e^{-iH_0t/\hbar} - \frac{i}{\hbar}e^{iH_0t/\hbar}A(t)e^{-iH_0t/\hbar}H_0}_{=-\frac{i}{\hbar}[A_I(t),H_0]} \\ &+ e^{iH_0t/\hbar}(\partial_t A(t))e^{-iH_0t/\hbar}, \end{aligned} \tag{2}$$

woraus direkt das Gesuchte folgt.

b) Es sei $U_0(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}$. Es gilt $U^{-1}(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) = U(t_0, t)$. Es sei t_0 der Zeitpunkt, an dem alle Bilder übereinstimmen. Ausgehend vom Erwartungswert im Schrödingerbild, finden wir dann

$$\begin{aligned} \langle A \rangle (t) &= \langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle \psi(t)| \underbrace{U_0U_0^\dagger}_{=1} A \underbrace{U_0U_0^\dagger}_{=1} |\psi(t)\rangle = \underbrace{\langle \psi(t)|U_0}_{\langle \psi_I(t)|} \underbrace{U_0^\dagger A U_0}_{=A_I(t)} \underbrace{U_0^\dagger|\psi(t)\rangle}_{=|\psi_I(t)\rangle} \\ &= \langle \psi_I(t)|A_I(t)|\psi_I(t)\rangle . \end{aligned} \tag{3}$$

Um zwischen Schrödinger- und Heisenbergbild zu wechseln, nutzen wir den vollen Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0) = Te^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t dt' H(t')}$ mit Zeitordnungsoperator T. Es ist dann

$$\langle A \rangle (t) = \langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle \psi(t_0)| \underbrace{U^\dagger A U}_{=A_H(t)} |\psi(t_0)\rangle = \langle \psi_H(t_0)|A_H(t)|\psi_H(t_0)\rangle . \tag{4}$$

2. Spin im rotierenden magnetischen Feld (9 Punkte)

Wir betrachten ein Spin-1/2-Teilchen in einem Magnetfeld mit konstanter Komponente in z-Richtung und einer mit der Frequenz ω rotierenden Komponente in der x-y-Ebene. Der Hamiltonoperator lautet

$$H(t) = H_0 + V(t) \tag{5}$$

mit

$$H_0 = \frac{\hbar}{2} B_z \sigma_z, \quad V(t) = \frac{\hbar}{2} B_\perp (\sigma_x \cos \omega t + \sigma_y \sin \omega t), \tag{6}$$

wobei σ_i die Pauli-Matrizen sind.

a) Zeigen Sie,

$$e^{iH_0 t/\hbar} = \cos\left(\frac{B_z t}{2}\right) + i\sigma_z \sin\left(\frac{B_z t}{2}\right), \tag{7}$$

indem Sie die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion sowie $\sigma_z^2 = 1$ nutzen. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Störoperator $V_I(t)$ im Wechselwirkungsbild. (3 Punkte)

Wir können die Wellenfunktion zu jedem Zeitpunkt als Linearkombination der Eigenzustände von σ_z schreiben

$$|\psi_I(t)\rangle = c_\uparrow(t) |\uparrow\rangle + c_\downarrow(t) |\downarrow\rangle \tag{8}$$

mit $\sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$, $\sigma_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$. Es sei $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$.

c) Lösen Sie die Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild für den Fall $\omega = B_z$ und bestimmen Sie damit den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle \sigma_z \rangle (t)$. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Wir teilen die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion in gerade und ungerade Terme auf

$$e^{iH_0 t/\hbar} = e^{iB_z \sigma_z t/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iB_z t}{2}\right)^n \frac{\sigma_z^n}{n!} \tag{9}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iB_z t}{2}\right)^{2n} \frac{\sigma_z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iB_z t}{2}\right)^{2n+1} \frac{\sigma_z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{10}$$

und nutzen nun, dass $\sigma_z^{2n} = 1$ und entsprechend $\sigma_z^{2n+1} = \sigma_z$. Damit erhalten wir mit den Reihenentwicklungen der Sinus- und Kosinusfunktion

$$e^{iH_0 t/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{B_z t}{2}\right)^{2n} + i\sigma_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{B_z t}{2}\right)^{2n+1} \tag{11}$$

$$= \cos(B_z t/2) + i\sigma_z \sin(B_z t/2). \tag{12}$$

b) Der Störoperator im Wechselwirkungsbild lautet

$$V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \tag{13}$$

$$= \frac{\hbar B_\perp}{2} \left(\cos \frac{Bt}{2} + i\sigma_z \sin \frac{Bt}{2}\right) (\sigma_x \cos \omega t + \sigma_y \sin \omega t) \left(\cos \frac{Bt}{2} - i\sigma_z \sin \frac{Bt}{2}\right).$$

Durch Matrixmultiplikation, bzw. Ausnutzen der Kommutationsrelationen zwischen den Pauli-Matrizen, finden wir

$$V_I(t) = \frac{\hbar B_\perp}{2} (\sigma_x \cos(B_z - \omega)t - \sigma_y \sin(B_z - \omega)t) \tag{14}$$

$$= \frac{\hbar B_\perp}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(B_z - \omega)t} \\ e^{-i(B_z-\omega)t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

c) Die Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild lautet

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = V_I(t) |\psi_I(t)\rangle \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow \quad i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_\uparrow \\ \dot{c}_\downarrow \end{pmatrix} = \frac{\hbar B_\perp}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(B_z-\omega)t} \\ e^{-i(B_z-\omega)t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\uparrow \\ c_\downarrow \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Sie vereinfacht sich im Fall $B_z = \omega$ zu den beiden Differentialgleichungen

$$\dot{c}_\uparrow = -\frac{iB_\perp}{2} c_\downarrow, \quad \dot{c}_\downarrow = -\frac{iB_\perp}{2} c_\uparrow. \tag{18}$$

Ableiten der ersten Gleichung und einsetzen der zweiten liefert

$$\ddot{c}_\uparrow = -\frac{B_\perp^2}{4} c_\uparrow, \tag{19}$$

was, zusammen mit der Anfangsbedingung $c_\uparrow(0) = 1, c_\downarrow(0) = 0$ und der Normierungsbedingung, die Lösung

$$c_\uparrow(t) = \cos\left(\frac{B_\perp t}{2}\right), \quad c_\downarrow(t) = -i \sin\left(\frac{B_\perp t}{2}\right) \tag{20}$$

liefert. Der gesuchte Erwartungswert lautet damit

$$\langle \sigma_z \rangle (t) = \langle \psi_I(t) | \sigma_z | \psi_I(t) \rangle \tag{21}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(B_\perp t/2) \\ -i\sin(B_\perp t/2) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(B_\perp t/2) \\ -i\sin(B_\perp t/2) \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$= \cos^2(B_\perp t/2) - \sin^2(B_\perp t/2) = \cos(B_\perp t). \tag{23}$$

3. Harmonischer Oszillator mit zeitabhängiger Störung (7 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2. \tag{24}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde für einen Zeitraum T eine Störung $V(t)$ eingeschaltet mit

$$V(t) = \sqrt{2\hbar m \omega^3}\, \lambda x \cdot \begin{cases} t/T, & 0 < t < T/2 \\ (1 - t/T), & T/2 < t < T, \\ 0, & t < 0 \text{ oder } t > T, \end{cases} \tag{25}$$

wobei $\lambda \ll 1$. Der gesamte Hamiltonoperator lautet also $H(t) = H_0 + V(t)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im Grundzustand.

Bestimmen Sie in Störungstheorie erster Ordnung in λ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach der Zeit $t > T$ im ersten angeregten Zustand befindet. Skizzieren Sie die Übergangswahrscheinlichkeit als eine Funktion von ωT.
Hinweis: Es ist nützlich, den Hamiltonoperator durch Auf- und Absteigeoperatoren auszudrücken.

Lösungsvorschlag

Wir bezeichnen mit $|n\rangle, n = 1, 2, \dots$ die Energieeigenzustände von H_0 mit $H_0 |n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2) |n\rangle$. Es ist $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. In erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie, lautet der Zustand im Wechselwirkungsbild zur Zeit t

$$|\psi_I(t)\rangle \simeq \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t')\right) |0\rangle \tag{26}$$

mit

$$V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar}. \tag{27}$$

Wir nutzen im Folgenden

$$e^{-iH_0 t/\hbar} |n\rangle = e^{-i\omega(n+1/2)t} |n\rangle \tag{28}$$

sowie

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \tag{29}$$

mit den Leiteroperatoren a und $a^\dagger$, die auf den Grundzustand wie folgt wirken

$$a|0\rangle = 0, \quad a^\dagger |0\rangle = |1\rangle . \tag{30}$$

Wir finden damit

$$e^{iH_0 t/\hbar} x e^{-iH_0 t/\hbar} |0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} e^{i\omega t} |1\rangle . \tag{31}$$

Also gilt

$$|\psi_I(t)\rangle = |0\rangle - i\lambda\omega \left(\int_0^{T/2} dt' \frac{t}{T} e^{i\omega t} + \int_{T/2}^{T} dt' \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{i\omega t} \right) |1\rangle \tag{32}$$

$$= |0\rangle + i\lambda \frac{(e^{i\omega T/2} - 1)^2}{\omega T} |1\rangle . \tag{33}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit t im ersten angeregten Zustand vorzufinden, lautet damit

$$P_{0\to 1} = |\langle 1|\psi_I(t)\rangle|^2 = \lambda^2 \left| \frac{(e^{i\omega T/2} - 1)^2}{\omega T} \right|^2 = 16\lambda^2 \frac{\sin^4(\omega T/4)}{\omega^2 T^2}. \tag{34}$$

Sie ist unten skizziert als Funktion von $\omega T/4\pi$. Interessanterweise ist die Übergangswahrscheinlichkeit gleich null, wenn $\omega T = n\pi$ mit $n = 0, 4, 8, \ldots$, und weist lokale Maxima auf bei $\omega T = n\pi$ mit $n = 2, 6, 10, \ldots$. Außerdem sind große Werte von ωT stark unterdrückt (adiabatische Näherung!).