Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik II (WS 2024/25)

Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian Reich

Lösungen zu Blatt 5
Besprechung 03.12.2024

---

1. Gamma-Matrizen (10 Punkte)

Die Gamma-Matrizen γ^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, erfüllen die Dirac-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4, \tag{1}$$

wobei I_4 die 4×4-Einheitsmatrix bezeichnet und $g^{\mu\nu}$ die Minkowski-Metrik ist. Wir führen für Vektoren a^μ außerdem die Notation $\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu$ ein. Zudem definieren wir die "fünfte Gamma-Matrix" $\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Hinweis: Die Teilaufgaben b) und c) lassen sich alleine anhand der hier gegebenen Relationen lösen (ohne eine explizite Darstellung der Gamma-Matrizen zu nutzen).

a) Überprüfen Sie in der Dirac-Darstellung, dass gilt

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \tag{2}$$

wobei $k \in \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0. \quad \text{(2 Punkte)} \tag{3}$$

b) Beweisen Sie folgende Identitäten (4 Punkte)

$$\begin{gathered}\gamma_\mu\gamma^\mu = 4I_4, \quad \gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}, \quad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4a_\mu b^\mu I_4, \\ \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a_\mu b^\mu I_4, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

c) Zeigen Sie

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5) = 0, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \tag{5}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda) = 4(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}), \tag{6}$$

wobei $\mathrm{Tr}(\dots)$ die Spur bezeichnet. Nutzen Sie, dass unter der Spur zyklisch vertauscht werden kann $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)$. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) In der Dirac-Darstellung ist

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

γ_0 ist reell und diagonal und damit offensichtlich hermitesch. Die Pauli-Matrizen sind hermitesch, und damit $(\gamma^k)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & (-\sigma_k)^\dagger \\ \sigma_k^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^k$. Mit $(\gamma^0)^2 = I_4$ und $\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0$ folgt dann

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \left\{ \begin{array}{c} \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0 \\ \gamma^0\gamma^k\gamma^0 = -\gamma^k \end{array} \right\} = (\gamma^\mu)^\dagger. \tag{8}$$

b) Hier und in Aufgabe 2 werden wir davon Gebrauch machen, dass für $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ und $B^{\mu\nu} = -B^{\nu\mu}$ gilt

$$A^{\mu\nu}q_\mu q_\nu = \frac{1}{2}A^{\mu\nu}(q_\mu q_\nu + q_\nu q_\mu) = \frac{1}{2}A^{\mu\nu}\{q_\mu, q_\nu\}, \tag{9}$$

$$B^{\mu\nu}q_\mu q_\nu = \frac{1}{2}B^{\mu\nu}(q_\mu q_\nu - q_\nu q_\mu) = \frac{1}{2}B^{\mu\nu}[q_\mu, q_\nu], \tag{10}$$

$$A^{\mu\nu}B_{\mu\nu} = -A^{\mu\nu}B_{\mu\nu} = 0. \tag{11}$$

Es ist damit nun

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}I_4 = (1^2 + 3\cdot(-1)^2)I_4 = 4I_4, \tag{12}$$

$$\gamma_\mu \not{a}\gamma^\mu = a_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = a_\nu\gamma_\mu(-\gamma^\mu\gamma^\nu + 2g^{\mu\nu}) = -4\not{a} + 2\not{a} = -2\not{a}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu &= a_\nu b_\rho\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu = a_\nu b_\rho(-\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + 2\gamma_\mu\gamma^\nu g^{\mu\rho})\\ &= a_\nu b_\rho(\gamma_\mu\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - 2\gamma^\nu\gamma^\rho + 2\gamma^\rho\gamma^\nu) = 2a_\nu b_\rho\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} = 4a_\nu b^\nu I_4,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = a_\mu b_\nu\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2a_\mu b^\mu I_4, \tag{15}$$

und schließlich

$$\{\gamma_5, \gamma^0\} = i(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = i((-1)^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^1\gamma^2\gamma^3) = 0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\{\gamma_5, \gamma^1\} &= i(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = i((-1)^2\gamma^0(-I_4)\gamma^2\gamma^3 + (-1)^1\gamma^0(-I_4)\gamma^2\gamma^3)\\ &= 0,\end{aligned} \tag{17}$$

und genauso für γ^2 und γ^3.

c)

$$\mathrm{Tr}\gamma_5 = i\mathrm{Tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = i\mathrm{Tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0) = i(-1)^3\mathrm{Tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\mathrm{Tr}\gamma_5 = 0, \tag{18}$$

wobei wir zunächst die Zyklizität der Spur ausgenutzt und danach unter der Spur antikommutiert haben.

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \frac{1}{2}[\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) + \mathrm{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\mu)] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}I_4 = 4g^{\mu\nu}, \tag{19}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda) = 2\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)g^{\kappa\lambda} - \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa) = 8g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa). \tag{20}$$

Wir setzen dieses Vorgehen iterativ fort, tauschen als nächstes $\nu \leftrightarrow \lambda$ und schließlich $\mu \leftrightarrow \lambda$ in der jeweils neu hervorgehenden Spur über vier Gamma-Matrizen. Wir haben dann

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda) = 8(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}) - \underbrace{\mathrm{Tr}(\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa)}_{=\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda)}, \tag{21}$$

und damit

$$2\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda) = 8(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}), \tag{22}$$

woraus das Gesuchte folgt.

2. Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld **(10 Punkte)**

Die Dirac-Gleichung in kovarianter Form für ein Teilchen mit Ladung q im elektromagnetischen Feld A^μ lautet

$$\left[\gamma^\mu(i\hbar\partial_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) - mc\right]\Psi = 0. \tag{23}$$

a) Es sei $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma_0$. Welcher Gleichung genügt $\bar{\Psi}$? (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass der Dirac-Strom $j^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllt. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis ohne elektromagnetischem Feld. (4 Punkte)

c) In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen auch die Klein-Gordon-Gleichung $(\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu + m^2c^2)\Psi = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes die Lösungen der Dirac-Gleichung stattdessen folgender Gleichung genügen

$$\left[\left(\hbar\partial_\mu + \frac{iq}{c}A_\mu\right)\left(\hbar\partial^\mu + \frac{iq}{c}A^\mu\right) + \frac{\hbar q}{2c}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2c^2\right]\Psi = 0, \tag{24}$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ der Feldstärke-Tensor ist und $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ (σ sind hier **nicht** die Pauli-Matrizen!). (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Das hermitesch konjugierte der Dirac-Gleichung lautet

$$-i\hbar\partial_\mu\Psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - \frac{q}{c}A_\mu\Psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - mc\Psi^\dagger = 0. \tag{25}$$

Wir multiplizieren von rechts mit γ^0 und nutzen die Formel aus der 1a) um zu finden

$$-i\hbar\partial_\mu\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0 - \frac{q}{c}A_\mu\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0 - mc\Psi^\dagger\gamma^0 = 0 \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow \quad i\hbar\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + \frac{q}{c}A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + mc\bar{\Psi} = 0. \tag{27}$$

b) Es ist

$$\partial_\mu j^\mu = c(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi + c\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \tag{28}$$

Wir wissen aus der Dirac-Gleichung

$$\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = -i\left(\frac{q}{c\hbar}\gamma^\mu A_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\Psi \tag{29}$$

$$(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu = i\bar{\Psi}\left(\frac{q}{c\hbar}\gamma^\mu A_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right). \tag{30}$$

Oben eingesetzt sieht man direkt $\partial_\mu j^\mu = 0$. Der Ausdruck für j^μ ist völlig unabhängig von A^μ und damit (im Gegensatz zum Klein-Gordon-Strom!) unabhängig davon, ob sich das Teilchen in einem elektromagnetischen Feld befindet oder nicht.

c) Wir multiplizieren die Dirac-Gleichung von links mit $[-\gamma^\nu(i\hbar\partial_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) - mc]$

$$\left[-\gamma^\mu(i\hbar\partial_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) - mc\right]\left[\gamma^\nu(i\hbar\partial_\nu - \frac{q}{c}A_\nu) - mc\right]\Psi = 0 \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(\hbar\partial_\mu + \frac{iq}{c}A_\mu)(\hbar\partial_\nu + \frac{iq}{c}A_\nu)\gamma^\mu\gamma^\nu + m^2c^2\right]\Psi = 0. \tag{32}$$

Es ist

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}\left(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right) = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \tag{33}$$

und wir nutzen $\sigma^{\mu\nu}A_\mu A_\nu = \sigma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = 0$, da $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$, woraus folgt

$$\left[(\hbar\partial_\mu + \frac{iq}{c}A_\mu)(\hbar\partial^\mu + \frac{iq}{c}A^\mu) + \frac{\hbar q}{c}\sigma^{\mu\nu}((\partial_\mu A_\nu) + A_\nu\partial_\mu + A_\mu\partial_\nu) + m^2c^2\right]\Psi = 0. \tag{34}$$

Schließlich ist

$$\sigma^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu = -\sigma^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu, \tag{35}$$

$$\sigma^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{36}$$

und es folgt die gesuchte Gleichung

$$\left[\left(\hbar\partial_\mu + \frac{iq}{c}A_\mu\right)\left(\hbar\partial^\mu + \frac{iq}{c}A^\mu\right) + \frac{\hbar q}{2c}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2c^2\right]\Psi = 0. \tag{37}$$

Wir sehen damit, dass im elektromagnetischen Feld die Lösungen der Dirac-Gleichung, im Gegensatz zum Fall ohne Feld, nicht mehr die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Das Verhalten von Teilchen, die durch die Dirac-Gleichung beschrieben werden, ist im elektromagnetischen Feld fundamental unterschiedlich zu Teilchen, die durch die Klein-Gordon-Gleichung beschrieben werden.