

Moderne Theoretische Physik II (WS 2024/25)

Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian ReichLösungen zu Blatt 6
Besprechung 10.12.2024

1. Lösungen der freien Dirac-Gleichung (10 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das Verhalten von 4-Spinoren $\Psi(x)$ unter Lorentztransformationen mit $x'^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu$ kennengelernt. Es gilt

$$\Psi'(x') = S(\Omega)\Psi(\Omega^{-1}x'), \quad (1)$$

$$\text{mit} \quad \Omega^\nu_\mu \gamma^\mu = S^{-1}\gamma^\nu S. \quad (2)$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Lösungen zur freien Dirac-Gleichung für Teilchen mit beliebigem Impuls durch einen Lorentz-Boost aus dem Ruhesystem des Teilchens zu erhalten.

- Bestimmen Sie die vier linear unabhängigen Lösungen der freien Dirac-Gleichung $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0$ im Ruhesystem des Teilchens, d.h. es gelte für den 4-Impuls $p^\mu = (E/c, \mathbf{0})$. (1 Punkt)
- Zeigen Sie, dass für einen Boost Ω in ein System, in dem das Teilchen (mit positiver Energie) den 3-Impuls \mathbf{p} hat, der Ausdruck

$$S(\Omega) = \mathcal{N} \left(I_4 - \frac{c\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4 + mc^2}} \gamma^0 \right). \quad (3)$$

die Bedingung in Gl. (2) erfüllt. (4 Punkte)

- Bestimmen Sie die Normierungskonstante \mathcal{N} so, dass $\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}$ gilt (was die Lorentzinvarianz von $\bar{\Psi}\Psi$ garantiert). (2 Punkte)
- (* *Alternative zu b) und c)*: Berechnen Sie $S(\Omega)$ direkt mittels der Generatoren für Lorentz-Boosts.
- Finden Sie nun die vier linear unabhängigen Lösungen $\Psi'(x')$ im geboosteten System. Sie sollten (bis auf eventuelle Phasen) die ebene-Wellen-Lösungen erhalten, die Sie schon aus der Vorlesung kennen. (1 Punkt)
- Sei Ψ eine der ebene-Wellen-Lösungen mit Energie E . Überprüfen Sie, dass das Ladungskonjugierte $\Psi^c = i\gamma^2\Psi^*$ einer ebene-Wellen-Lösung mit Energie $-E$ entspricht. (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

- Ohne Impuls reduziert sich die Dirac-Gleichung auf $(\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\partial_t - mc)\Psi = 0$, wobei in der Dirac-Darstellung $\gamma^0 = \sigma_z \otimes I_2$. Damit existieren vier linear unabhängige

Lösungen, die wir wie folgt wählen können

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar}, \quad (4)$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imc^2t/\hbar}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imc^2t/\hbar}, \quad (5)$$

wobei ψ_1 und ψ_2 die positive Energie $E = mc^2$ aufweisen, während die Energie von ψ_3 und ψ_4 negativ ist, $E = -mc^2$.

- b) Wir wechseln in ein Bezugssystem, das sich mit Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ relativ zum alten bewegt, sodass in diesem Bezugssystem das Teilchen die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m$ hat, mit dem Lorentzfaktor $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2} = |E|/mc^2$, wobei $|E| = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4}$. (Dass sowohl der Lorentzfaktor als auch die Dirac-Matrizen mit γ bezeichnet werden ist natürlich etwas ungeschickt, aber wir verbleiben hier mit den konventionellen Bezeichnungen. Aus dem Kontext sollte immer klar sein, was gemeint ist.) Die entsprechende Lorentztransformation Ω ist gegeben durch

$$\Omega^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \mathbf{p}^T/mc \\ \mathbf{p}/mc & I_3 + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{p}\mathbf{p}^T}{\mathbf{p}^2} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Wir berechnen nun zunächst die rechte Seite von Gl. (2). Dazu benötigen wir $S^{-1}(\Omega)$. Hierzu können wir beispielsweise überlegen, dass $S^{-1}(\Omega) = S(\Omega^{-1})$ gelten muss, damit das Hintereinanderausführen zweier zueinander inverser Lorentztransformationen wieder zum gleichen Spinor führt, wobei in unserem Fall eines einfachen Boosts $\Omega^{-1} = \Omega|_{\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}}$ ist. Alternativ spicken wir in Aufgabenteil c). Oder wir konstruieren das Inverse, indem wir beobachten, dass

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma^0)^2 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma^0 = -(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})^2 = -\frac{1}{2} p_i p_j \{\gamma^i, \gamma^j\} = \mathbf{p}^2 I_4 \propto I_4. \quad (7)$$

Wir schlussfolgern, dass

$$S^{-1}(\Omega) = \mathcal{N}' \left(I_4 + \frac{c \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \gamma^0 \right) \quad (8)$$

ein erfolgsversprechender Ansatz ist und finden

$$SS^{-1} = \mathcal{N}\mathcal{N}' \left(1 - \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{(|E| + mc^2)^2} \right) I_4 \quad (9)$$

$$= \mathcal{N}\mathcal{N}' \frac{2mc^2}{|E| + mc^2} I_4 \stackrel{!}{=} I_4 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}\mathcal{N}' = \frac{|E| + mc^2}{2mc^2}. \quad (11)$$

Damit ist also

$$S^{-1} \gamma^\nu S = \frac{|E| + mc^2}{2mc^2} \left(I_4 + \frac{c \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \gamma^0 \right) \gamma^\nu \left(I_4 - \frac{c \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \gamma^0 \right) \quad (12)$$

und für $\nu = 0$ folgt

$$S^{-1} \gamma^0 S = \frac{1}{mc^2} (|E| \gamma^0 + c \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}), \quad (13)$$

sowie für γ^i , $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$S^{-1}\gamma^i S = \gamma^i + \frac{c p_i}{m c^2} \left(\gamma^0 + \frac{c \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m c^2} \right), \quad (14)$$

wobei wir genutzt haben, dass

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma^i = p_j \gamma^j \gamma^i = -\gamma^i \gamma^j p_j - 2\delta_{ij} p_j = -\gamma^i \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - 2p_i. \quad (15)$$

Auf der linken Seite von Gl. (2) finden wir für $\nu = 0$

$$\Omega_{\mu}^0 \gamma^{\mu} = \Omega_0^0 \gamma^0 + \Omega_i^0 \gamma^i = \frac{|E|}{m c^2} \gamma^0 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{m c} = S^{-1} \gamma^0 S \quad (16)$$

und für $\nu = i$

$$\Omega_{\mu}^i \gamma^{\mu} = \Omega_0^i \gamma^0 + \Omega_j^i \gamma^j = \frac{p_i}{m c} \gamma^0 + \left(\delta_{ij} + \frac{1}{m c^2} \frac{c^2 p_i p_j}{|E| + m c^2} \right) \gamma^j \quad (17)$$

$$= \frac{p_i}{m c} \gamma^0 + \gamma^i + \frac{1}{m c^2} \frac{c^2 p_i \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{|E| + m c^2} = S^{-1} \gamma^i S, \quad (18)$$

was zu zeigen war.

c) Es ist

$$\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0 = \mathcal{N}^* \gamma^0 \left(I_4 - \gamma^{0\dagger} \frac{c \boldsymbol{\gamma}^{\dagger} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m c^2} \right) \gamma^0 \quad (19)$$

$$= \mathcal{N}^* \left(I_4 + \frac{c \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m c^2} \gamma^0 \right), \quad (20)$$

wobei wir $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0$ genutzt haben (siehe Blatt 5). Dies entspricht genau unserem Ansatz für S^{-1} aus Aufgabenteil b) und wir haben dort gesehen, dass

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{|E| + m c^2}{2 m c^2}}. \quad (21)$$

(*) Alternative zu b) und c):

Die Lorentztransformation kann mittels der Generatoren $K_{n=1,2,3}$ für Boosts dargestellt werden, wobei

$$\Omega = \exp(i \eta_n K_n) \quad (22)$$

und η_n die Komponenten der assoziierten Rapidität sind, mit $|\boldsymbol{\eta}| = \text{Artanh}(|\mathbf{v}|/c)$ und $\eta_n/|\boldsymbol{\eta}| = v_n/|\mathbf{v}|$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $S(\Omega)$ dann gegeben ist durch

$$S(\Omega) = \exp(i \eta_n \tilde{K}_n) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_x \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) \quad (23)$$

mit $\tilde{K}_n = \tilde{J}^{0n} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^n] = \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^n$ und in der Dirac-Darstellung $\gamma^0 \gamma^n = \sigma_x \otimes \sigma_n$. Wir nutzen nun die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und dass

$$(\sigma_x \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta})^{2n} = I_2 \otimes (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta})^{2n} = I_2 \otimes I_2 \boldsymbol{\eta}^{2n}, \quad (24)$$

$$(\sigma_x \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta})^{2n+1} = \sigma_x \otimes (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta})^{2n+1} = \sigma_x \otimes (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta}^{2n}, \quad (25)$$

woraus folgt

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\sigma_x \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) = I_4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{|\boldsymbol{\eta}|}{2}\right)^{2n} - \sigma_x \otimes \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta})}{|\boldsymbol{\eta}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{|\boldsymbol{\eta}|}{2}\right)^{2n+1} \quad (26)$$

$$= I_4 \cosh(|\boldsymbol{\eta}|/2) - \sigma_x \otimes \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta})}{|\boldsymbol{\eta}|} \sinh(|\boldsymbol{\eta}|/2). \quad (27)$$

Es gilt

$$\cosh(|\boldsymbol{\eta}|/2) = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}}, \quad \sinh(|\boldsymbol{\eta}|/2) = \sqrt{\frac{|E| - mc^2}{2mc^2}}, \quad (28)$$

und insgesamt finden wir schließlich

$$S(\Omega) = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \left(I_4 + \sqrt{\frac{|E| - mc^2}{|E| + mc^2}} \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|} \gamma^0 \right), \quad (29)$$

woraus mit

$$\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|} = -\frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{|E|^2 - m^2c^4}} \quad (30)$$

das Gesuchte folgt.

d) Zunächst ist im Exponenten, mit $E_0 = mc^2$ für $\psi_{1,2}$ und $E_0 = -mc^2$ für $\psi_{3,4}$,

$$E_0 t = p^\mu x_\mu \rightarrow p^\mu \Omega_\mu^\nu x_\nu = \Omega_\mu^\nu p^\mu x_\nu \quad (31)$$

und

$$\Omega_\mu^\nu p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \mathbf{p}^T/mc \\ \mathbf{p}/mc & I_3 + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{p}\mathbf{p}^T}{p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0/c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_0/c \\ \frac{E_0}{mc^2} \mathbf{p} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} |E|/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Darüber hinaus ist in der Dirac-Darstellung

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

und damit finden wir

$$\psi'_1(x') = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i|E|t/\hbar + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar}, \quad (34)$$

$$\psi'_2(x') = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i|E|t/\hbar + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \quad (35)$$

$$\psi'_3(x') = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i|E|t/\hbar - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar}, \quad (36)$$

$$\psi'_4(x') = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i|E|t/\hbar - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar}. \quad (37)$$

Anwenden des Operators $i\hbar\partial_t$ auf diese Zustände zeigt uns, dass $\psi'_{1,2}$ die positive Energie $E = |E|$ haben, während $\psi'_{3,4}$ Lösungen bei der negativen Energie $E = -|E|$ entsprechen. Zudem bemerken wir, durch Anwenden des 3-Impulsoperators $-i\hbar\nabla$, dass $\psi'_{3,4}$ den Impulseigenwert $-\mathbf{p}$ haben. Ein Lorentzboost erzeugt also entgegengesetzte Impulsrichtungen für Lösungen bei positiven und negativen Energien. Ersetzen von $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ in den Ausdrücken für ψ'_3 und ψ'_4 liefert dann genau die Lösungen, die auch im Skript gegeben sind.

e) Es ist in der Dirac-Darstellung

$$i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_y \\ -i\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

und außerdem

$$\sigma_y(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^* = -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\sigma_y. \quad (39)$$

Damit finden wir

$$i\gamma^2(\psi'_1(x'))^* = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} i\sigma_y \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^*}{|E| + mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -i\sigma_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i|E|t/\hbar - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \quad (40)$$

$$= \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i|E|t/\hbar - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar} = \psi'_4(x') \quad (41)$$

und entsprechend für die anderen Lösungen.

2. Das ‘‘Klein’sche Paradoxon’’

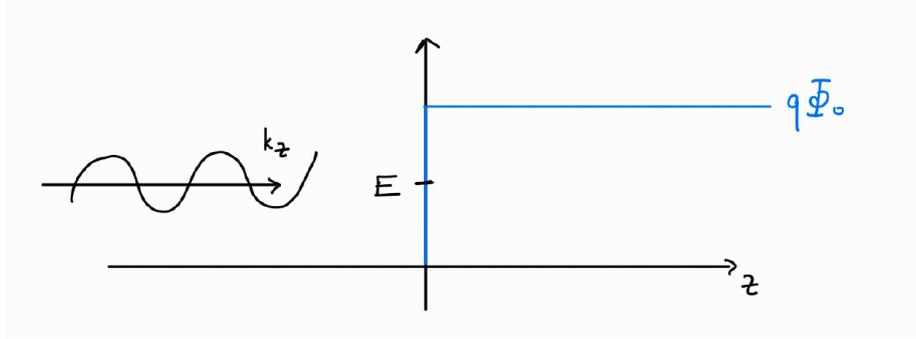
(10 Punkte)

Wir wollen das Problem der Potentialstufe, das wir aus der nicht-relativistischen Quantenmechanik kennen, nun auch für die Dirac-Gleichung behandeln. Wir betrachten dazu ein Teilchen mit Ladung q , Wellenvektor $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)^T$, $k_z > 0$, und Energie $E > 0$, das von $z \rightarrow -\infty$ kommend auf das elektrostatische Potential $\Phi = \Phi_0\theta(z)$ trifft. Der Spin der einfallenden Teilchen sei dabei in positive z -Richtung polarisiert, sodass die (stationäre) einfallende Wellenfunktion lautet

$$\Psi_{\text{in}}(z < 0) = e^{ik_z z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck_z}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Gehen Sie vor, wie Sie es in der nicht-relativistischen Quantenmechanik gelernt haben, um die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten zu bestimmen. Überlegen Sie dabei, wie die Randbedingungen zu wählen sind. Unterscheiden Sie zwischen den Fällen (i) $q\Phi_0 < E - mc^2$, (ii) $E - mc^2 < q\Phi_0 < E + mc^2$ und (iii) $q\Phi_0 > E + mc^2$. Untersuchen Sie auch den Grenzfall (iv) $q\Phi_0/E \rightarrow \infty$. Hätten Sie diese Ergebnisse erwartet? Können Sie sie interpretieren?

Hinweis: Um die korrekten Koeffizienten zu erhalten, müssen Sie in Ihrem Ansatz für die reflektierte und transmittierte Welle auf die jeweilige Gruppengeschwindigkeit bzw. auf die Richtung des Stroms achten!



Lösungsvorschlag

Wie in der nicht-relativistischen Quantenmechanik kennengelernt, kann an der Potentialstufe Reflexion oder Transmission der einfallenden Welle stattfinden, sodass wir als Ansatz für die gesamte Wellenfunktion nehmen (da in x - und y -Richtung Translationsinvarianz herrscht, ist der zugehörige Impuls erhalten und $k_x = k_y = 0$ gilt überall)

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi_{\text{in}}(z) + \Psi_{\text{refl}}(z), & z < 0 \\ \Psi_{\text{trans}}(z), & z > 0 \end{cases} \quad (43)$$

mit dem reflektierten Anteil (mit negativem Impuls)

$$\Psi_{\text{refl}}(z) = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-\hbar ck_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_z z} + r' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-\hbar ck_z}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{-ik_z z}, \quad (44)$$

wobei wir mit dem zweiten Term die Möglichkeit einer Änderung der Spinprojektion beim Prozess der Reflexion offen lassen. Hier ist $\hbar k_z = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}/c > 0$. In der Dirac-Gleichung für das Gebiet $z > 0$ ist E ersetzt durch $E - q\Phi_0$. Die Energie-Impuls-Relation lautet damit

$$(E - q\Phi_0)^2 = c^2 p_z'^2 + m^2 c^4. \quad (45)$$

Die transmittierte Welle muss sich nach rechts bewegen, das Vorzeichen der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{\partial E}{\partial p_z}$ also positiv sein. Um das Vorzeichen des Impulses p_z' in unserem Ansatz korrekt zu bestimmen, müssen wir also unterscheiden, ob $E \pm mc^2 \gtrless q\Phi_0$. Wir lassen deshalb in folgendem Ansatz

$$\Psi_{\text{trans}}(z) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck'_z}{(E-q\Phi_0)+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik'_z z} + t' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck'_z}{(E-q\Phi_0)+mc^2} \end{pmatrix} e^{ik'_z z} \quad (46)$$

zunächst offen, ob k'_z positiv oder negativ ist.

Wir bemerken allerdings direkt, dass wenn $E - mc^2 < q\Phi_0 < E + mc^2$, p_z rein imaginär ist, womit die Welle im Bereich $z > 0$ exponentiell gedämpft ist und der Transmissionskoeffizient verschwindet. Dies entspricht unserer Erwartung aus der nicht-relativistischen Quantenmechanik für eine unendlich breite Potentialstufe die höher ist als die kinetische Energie des Teilchens.

Die Koeffizienten r, r', t, t' in den anderen Fällen bestimmen wir über die Stetigkeitsbedingung bei $z = 0$. Im Gegensatz zur Schrödinger-Gleichung, die eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, ist die Dirac-Gleichung eine Differentialgleichung erster

Ordnung, sodass lediglich die Stetigkeit der Wellenfunktion, nicht die ihrer Ableitung, gelten muss. Wir fordern also

$$\Psi_{\text{in}}(z=0) + \Psi_{\text{refl}}(z=0) = \Psi_{\text{trans}}(z=0) \quad (47)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + r = t, \\ (1 - r) \frac{\hbar c k_z}{E + mc^2} = t \frac{\hbar c k'_z}{(E - q\Phi_0) + mc^2}, \\ r' = t', \\ -r' \frac{\hbar c k_z}{E + mc^2} = t' \frac{\hbar c k'_z}{(E - q\Phi_0) + mc^2}. \end{cases} \quad (48)$$

Aus der dritten und vierten Gleichung folgt $r' = t' = 0$. Aus den ersten beiden Gleichungen lassen sich r und t bestimmen. Wir führen den Koeffizienten A ein

$$A \equiv \frac{k'_z}{k_z} \frac{E + mc^2}{E - q\Phi_0 + mc^2} \quad (49)$$

mit dem gilt

$$1 - r = At = A(1 + r) \Rightarrow r = \frac{1 - A}{1 + A}, \quad t = \frac{2}{1 + A}. \quad (50)$$

Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind nun bestimmt durch den Quotienten aus reflektiertem bzw. transmittiertem und einfallendem Strom. Es ist

$$j_z^{(\text{in})} = c\Psi_{\text{in}}^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \Psi_{\text{in}} = \frac{2\hbar c^2 k_z}{E + mc^2}, \quad (51)$$

$$j_z^{(\text{refl})} = -|r|^2 \frac{2\hbar c^2 k_z}{E + mc^2}, \quad j_z^{(\text{trans})} = |t|^2 \frac{2\hbar c^2 k'_z}{E - q\Phi_0 + mc^2}. \quad (52)$$

Damit lautet der Reflexionskoeffizient

$$R = \left| \frac{j_z^{(\text{refl})}}{j_z^{(\text{in})}} \right| = |r|^2 = \left(\frac{1 - A}{1 + A} \right)^2 \quad (53)$$

und der Transmissionskoeffizient

$$T = \left| \frac{j_z^{(\text{trans})}}{j_z^{(\text{in})}} \right| = \frac{4A}{(1 + A)^2}. \quad (54)$$

Wir bemerken, dass $R + T = 1$.

Schließlich hatten wir in unserem Ansatz noch offengelassen, ob k'_z positiv oder negativ ist. Beginnen wir mit dem Fall $E - mc^2 > q\Phi_0$. Damit der transmittierte Strom positiv ist, bzw. damit die Gruppengeschwindigkeit der transmittierten Welle positiv ist, muss hier im Ansatz $\hbar k'_z = \sqrt{(E - q\Phi_0)^2 - m^2 c^4} / c > 0$ gewählt werden.

Erhöhen wir das Potential nun, sodass $q\Phi_0$ größer als $E - mc^2$ ist, aber noch kleiner als $E + mc^2$, so gilt, wie oben erwähnt, dass die Welle vollständig reflektiert wird (und unsere Ausdrücke für R und T haben keine Gültigkeit, da hier k'_z rein imaginär ist, und wir für die Herleitung von (53) und (54) reelles k'_z angenommen haben).

Erhöhen wir das Potential noch weiter, passiert etwas unerwartetes. Sobald $q\Phi_0 > E + mc^2$, sind wieder Lösungen mit reellem Impuls erlaubt. Allerdings ändert sich im transmittierten Strom auch das Vorzeichen des Nenners, sodass wir hier $\hbar k'_z = -\sqrt{(E - q\Phi_0)^2 - m^2 c^4} / c < 0$ wählen müssen. Erhöhen der Potentialstufe über den Bereich hinaus, in dem Transmission schon verboten war, bringt uns also wieder in einen Bereich, in dem die Welle teilweise transmittiert wird. Tatsächlich gilt sogar, dass

für $q\Phi_0 \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \sqrt{(E + mc^2)/(E - mc^2)}$ und damit $T \neq 0$. Das heißt, selbst bei einer unendlich hohen Potentialstufe, wird noch ein Teil der Welle transmittiert. Ist $E \gg mc^2$, gilt darüber hinaus $T \rightarrow 1$. Diese sonderbaren Beobachtungen sind bekannt als das ‘Klein’sche Paradoxon’.

Es kann folgendermaßen erklärt werden: Mit elektrostatischem Potential lauten die erlaubten Energien

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} + q\Phi_0. \quad (55)$$

Ist $q\Phi_0$ groß genug, werden also die Zustände, die ohne Potential bei negativen Energien lagen, zu Zuständen mit positiver Energie ‘angehoben’. Dies ist in der Skizze unten anschaulich gemacht. Somit stehen ab einer ausreichenden Potentialstärke (sobald die Lücke der Größe $2mc^2$ überwunden ist) also wieder Zustände bei der Energie E auf der rechten Seite zur Verfügung, in die die Welle transmittieren kann.

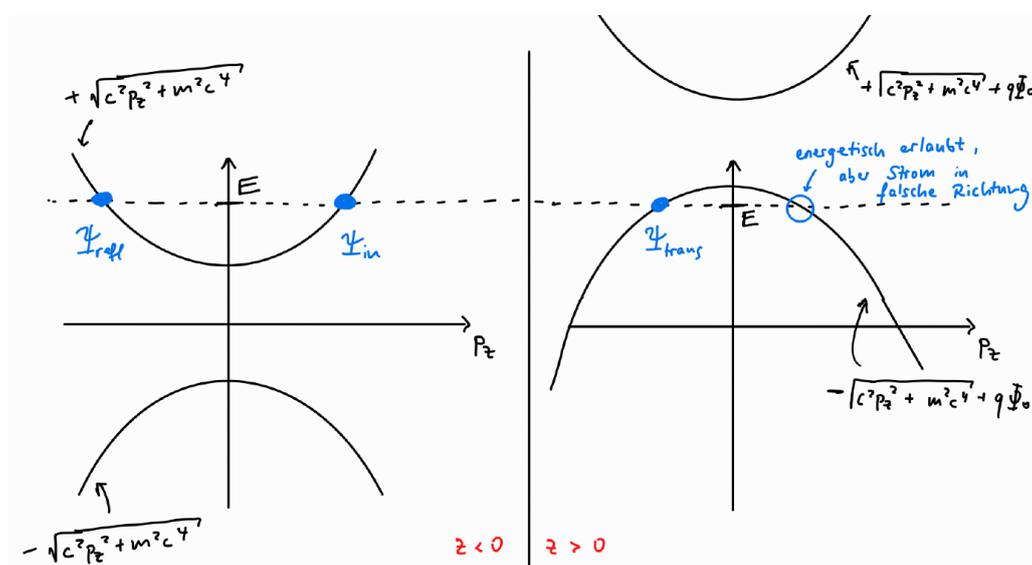


Abbildung 1: Dispersion links und rechts von $z = 0$ mit $q\Phi_0 > E + mc^2$.

Hinweis: In vielen Büchern und Artikeln wird **fälschlicherweise** in allen Fällen $k'_z > 0$ genommen. Dies führt dazu, dass A im letzten Fall negativ wird, und damit $R > 1$ und $T < 0$ gilt. Die Autoren erkennen das dann als unphysikalisch an und bezeichnen dies als ‘Klein’sches Paradoxon’, erkennen allerdings nicht, dass dies nur Folge ihres Fehlers in der Wahl der Richtung des transmittierten Stroms ist und der daraus resultierenden Fehlinterpretation der physikalischen Situation. Die Darstellung im originalen Artikel von Klein von 1929 ist aber korrekt und genau die, die wir hier präsentieren.

Siehe auch:

- Klein, O. *Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac*. Z. Physik 53, 157–165 (1929). <https://doi.org/10.1007/BF01339716>
- N. Dombey, A. Calogeracos. *Seventy years of the Klein paradox*. Physics Reports 315, 1–3 (1999) [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00023-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00023-X)