Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik II (WS 2024/25)

Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian Reich

Lösungen zu Blatt 9
Besprechung 14.01.2025

---

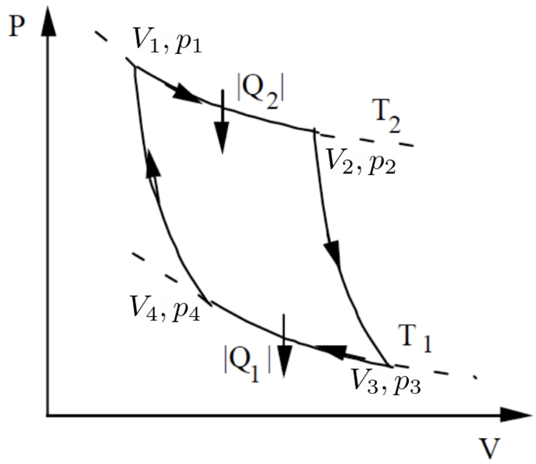
1. Carnot-Prozess und ideales Gas (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Carnot-Prozess an einem idealen Gas gilt

$$\frac{Q_2}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}, \tag{1}$$

wobei Q_2 die Wärme bezeichnet, die während der isothermen Expansion (von Volumen V_1 zu V_2) bei der Temperatur T_2 ins System fließt, und $|Q_1|$ die Wärme, die während der isothermen Kompression (von Volumen V_3 zu V_4) bei der Temperatur $T_1 < T_2$ das System verlässt.
Hinweis: Eine Beziehung zischen den vier Volumina erhalten Sie mithilfe der Adiabaten, die die Volumen V_2 und V_3 bzw. V_4 und V_1 miteinander verbinden.

Lösungsvorschlag



Es gilt für das ideale Gas $pV = NkT \Rightarrow p = NkT/V$. Zudem ist die Änderung der inneren Energie $dU = \delta Q - \delta W$ mit der zugeführten Wärme δQ und der vom System geleisteten Arbeit $\delta W = p\,dV$.

Bei isothermen Zustandsänderungen ist für das ideale Gas $dU = 0$, d.h. während der isothermen Expansion

$$Q_2 = \int \delta W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = NkT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = NkT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0 \tag{2}$$

und während der isothermen Kompression

$$Q_1 = NkT_1 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = NkT_1 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) < 0. \tag{3}$$

Die Zustandsänderung, die das System vom Volumen V_2 zum Volumen V_3 überführt, soll adiabatisch sein, d.h. es wird keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht $\delta Q = 0$, $dU = -\delta W$. Zudem kennen wir die kalorische Zustandsgleichung $U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}pV$, aus der folgt

$$dU = \frac{3}{2}(p\,dV + V\,dp) = -p\,dV = -\delta W \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{3}{5}\frac{dp}{p} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = -\frac{3}{5}\ln\left(\frac{p_3}{p_2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = -\frac{3}{2}\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right), \tag{5}$$

wobei wir eingesetzt haben $p_2 = NkT_2/V_2$ und $p_3 = NkT_1/V_3$. Genauso folgt für die adiabatische Zustandsänderung von V_4 zu V_1

$$\ln\left(\frac{V_4}{V_1}\right) = -\frac{3}{2}\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) \tag{6}$$

und damit

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}. \tag{7}$$

Also finden wir schließlich

$$\frac{Q_2}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}\frac{\ln(V_2/V_1)}{\ln(V_3/V_4)} = \frac{T_2}{T_1}. \tag{8}$$

2. Erzeugende Funktion und zentraler Grenzwertsatz (8 Punkte)

Eine Zufallsvariable X nehme einen ihrer möglichen Werte x mit einer Wahrscheinlichkeit an, die gegeben ist durch die normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$. Der zugehörige Erwartungswert ist gegeben durch $\langle X \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, xP(x)$, die Varianz durch $\sigma^2 \equiv \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$.

Wir definieren zudem die charakteristische Funktion $\phi_X(k)$ als Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\phi_X(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x) e^{ikx} = \langle e^{ikX} \rangle\,. \tag{9}$$

a) Zeigen Sie, dass das n-te Moment von X gegeben ist durch

$$\langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n}\frac{d^n}{dk^n}\phi_X(k)|_{k=0}. \qquad \text{(1 Punkt)} \tag{10}$$

b) Die Kumulanten $C_n(X)$ einer Zufallsvariablen sind definiert über folgende Beziehung mit der charakteristischen Funktion

$$\ln(\phi_X(k)) \equiv \sum_n C_n(X)\frac{(ik)^n}{n!}. \tag{11}$$

Zeigen Sie damit $C_1(X) = \langle X \rangle$ und $C_2(X) = \sigma^2$. (2 Punkte)

c) Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier **unabhängiger** Zufallsvariablen X_1 und X_2 ist gegeben durch $P(X_1, X_2) = P(X_1)P(X_2)$. Zeigen Sie, dass $\phi_{X_1+X_2}(k) = \phi_{X_1}(k)\phi_{X_2}(k)$. (1 Punkt)

d) Gegeben seien nun N unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_N$ mit identischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(X_1) = \cdots = P(X_N) \equiv P(X)$ mit Mittelwert $\langle X \rangle$ und Varianz σ^2. Wir definieren die Zufallsvariable $S_N \equiv \sum_{i=1}^N X_i/N$. Zeigen Sie, dass $P(S_N)$ für große N einer Gauß-Verteilung mit Erwartungwert $\langle X \rangle$ und Varianz σ^2/N entspricht. (4 Punkte)
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\phi_{S_N}(k)$ und zeigen Sie, dass für die Kumulanten gilt $C_n(S_N) = N^{1-n} C_n(X)$. Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung N^{-2}.

Lösungsvorschlag

a) Es ist

$$\frac{d^n}{dk^n}\phi_X(k)|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x)(ix)^n e^{ikx}|_{k=0} = i^n \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n P(x) = i^n \langle X^n \rangle . \quad (12)$$

b) Wir bemerken, dass aus der gegebenen Beziehung folgt

$$C_n(X) = \frac{1}{i^n}\frac{d^n}{dk^n}\ln(\phi_X(k))|_{k=0}. \quad (13)$$

Also

$$C_1(X) = \frac{1}{i}\frac{d}{dk}\ln(\phi_X(k))|_{k=0} = \frac{1}{i}\frac{1}{\phi_X(0)}\left.\frac{d\phi_X(k)}{dk}\right|_{k=0} = \langle X \rangle , \quad (14)$$

wobei wir unser Ergebnis aus der a) benutzt haben sowie $\phi_X(0) = \int dx\, P(x) = 1$. Genauso folgt für die zweite Kumulante

$$\begin{aligned} C_2(X) &= \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dk^2}\ln(\phi_X(k))|_{k=0} = -\frac{d}{dk}\left.\left(\frac{1}{\phi_X(k)}\frac{d\phi_X(k)}{dk}\right)\right|_{k=0} \\ &= \left(\left.\frac{d\phi_X(k)}{dk}\right|_{k=0}\right)^2 - \left.\frac{d^2\phi_X(k)}{dk^2}\right|_{k=0} = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \sigma^2. \end{aligned} \quad (15)$$

c)

$$\begin{aligned} \phi_{X_1+X_2}(k) &= \int dx_1 \int dx_2\, P(x_1,x_2) e^{ik(x_1+x_2)} \\ &= \int dx_1\, P(x_1)e^{ikx_1} \int dx_2\, P(x_2)e^{ikx_2} = \phi_{X_1}(k)\phi_{X_2}(k). \end{aligned} \quad (16)$$

d) Es ist

$$\phi_{S_N}(k) = \langle e^{ikS_N} \rangle = \prod_i \langle e^{ikX_i/N} \rangle = (\phi_X(k/N))^N . \quad (17)$$

Weiter folgt aus der Definition der Kumulanten

$$\ln \phi_{S_N}(k) = \sum_n C_n(S_N)\frac{(ik)^n}{n!} \quad (18)$$

aber wir wissen auch

$$\ln \phi_{S_N}(k) = N \ln \phi_X(k/N) = \sum_n \frac{1}{N^{n-1}} C_n(X)\frac{(ik)^n}{n!}, \quad (19)$$

also gilt

$$C_n(S_N) = N^{1-n} C_n(X). \quad (20)$$

Da wir interessiert am Limes großer N sind, vernachlässigen wir die Beiträge mit $n > 2$ (da unsere Zufallsvariable $S_N \propto 1/N$, müssen wir $n = 2$ berücksichtigen.) Es ist damit

$$\begin{aligned}\phi_{S_N}(k) &\simeq \exp\left(ikC_1(S_N) - \frac{k^2}{2}C_2(S_N)\right) = \exp\left(ikC_1(X) - \frac{k^2}{2N}C_2(X)\right)\\ &= \exp\left(ik\langle X\rangle - \frac{k^2}{2N}\sigma^2\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Eine inverse Fourier-Transformation liefert schließlich die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P_{S_N}(s) = \int \frac{dk}{2\pi}\phi_{S_N}(k)e^{-iks} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2/N}}e^{-\frac{(s-\langle X\rangle)^2}{2\sigma^2/N}}, \tag{22}$$

wobei das Integral mittels quadratischer Substitution im Exponenten berechnet wurde. Wir erhalten also tatsächlich eine Gauß-Verteilung mit Erwartungswert $\langle X\rangle$ und Varianz $\sigma_S^2 = \sigma^2/N$. Dies ist der sogenannte zentrale Grenzwertsatz.

3. Gauß-Verteilung für mehrere Zufallsvariablen (7 Punkte)

Wir betrachten die gaußförmige Wahrscheinlichkeitsverteilung ρ für N Zufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_N$, die definiert ist durch

$$\rho(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^N}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \xi_i A_{ij} \xi_j\right). \tag{23}$$

A_{ij} sind dabei die Einträge einer symmetrischen, positiv definiten Matrix A, deren Inverse wir als $G = A^{-1}$ bezeichnen.

a) Überzeugen Sie sich davon, dass die Verteilungsfunktion normiert ist

$$\int d\xi_1 \ldots d\xi_N\, \rho(\xi_1, \ldots, \xi_N) = 1. \qquad \text{(2 Punkte)} \tag{24}$$

Hinweis: Führen Sie eine Variablentransformation durch, die die Matrix A diagonalisiert.

b) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion

$$\phi(k_1, \ldots, k_N) \equiv \langle e^{i\sum_{j=1}^{N} k_j \xi_j}\rangle \tag{25}$$

gegeben ist durch

$$\phi(k_1, \ldots, k_N) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} k_i G_{ij} k_j}. \qquad \text{(3 Punkte)} \tag{26}$$

c) Nutzen Sie die charakteristische Funktion, um den Erwartungswert $\langle\xi_i\rangle$, die Varianz $\langle\xi_i^2\rangle - \langle\xi_i\rangle^2$, sowie den Korrelator $\langle\xi_i\xi_j\rangle$ zu berechnen. (2 Punkte)
Hinweis: Nutzen Sie Ihre Erkenntnisse aus Aufgabe 2 a.

Lösungsvorschlag

a) Jede symmetrische Matrix A lässt sich mittels einer orthogonalen Matrix O diagonalisieren, $O^T A O = \Lambda$, wobei Λ diagonal ist. Aus der positiven Definitheit folgt zudem, dass alle Einträge von Λ positiv sind. Wir führen nun unter dem Integral eine Variablensubstitution durch $\xi_i = \sum_j O_{ij}\tilde{\xi}_j$ (da O orthogonal ist, ist die Jacobi-Determinante dieser Transformation 1) und erhalten

$$\begin{aligned}
\int d\xi_1 \dots d\xi_N \, \rho(\xi_1, \dots, \xi_N) &= \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^N}} \int d\tilde{\xi}_1 \dots d\tilde{\xi}_N \, \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i \Lambda_{ii}\tilde{\xi}_i^2\right) \\
&= \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^N}} \prod_i \left(\int d\tilde{\xi}_i \, e^{-\frac{1}{2}\Lambda_{ii}\tilde{\xi}_i^2}\right) && (27) \\
&= \sqrt{\det A}\left(\prod_i \Lambda_{ii}^{-1/2}\right) = 1, && (28)
\end{aligned}$$

da $\det A = \det \Lambda = \prod_i \Lambda_{ii}$.

b) Wir schreiben zunächst den Exponenten im Ausdruck

$$\phi(k_1, \dots, k_N) = \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^N}} \int d^N\xi \, \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} \xi_i A_{ij} \xi_j + i \sum_i k_i \xi_i\right) \tag{29}$$

mittels quadratischer Ergänzung um

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{i,j} \xi_i A_{ij}\xi_j + i\sum_i k_i\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_i G_{ij} k_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_i G_{ij} k_j \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\xi_i - i\sum_l k_l G_{li}\right) A_{ij} \left(\xi_j - i\sum_l G_{jl} k_l\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_i G_{ij} k_j, && (30)
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\sum_l A_{il}G_{kj} = \delta_{ij}$ und $G_{ij} = G_{ji}$. Definieren wir nun $y_i \equiv \xi_i - i\sum_l k_l G_{li}$, so erhalten wir

$$\phi(k_1, \dots, k_N) = \underbrace{\sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^N}} \int d^N y \, \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} y_i A_{ij} y_j\right)}_{=1} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} k_i G_{ij} k_j}. \tag{31}$$

c) Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle \xi_i \rangle &= \frac{1}{i}\frac{d}{dk_i}\phi(k_1, \dots, k_N)\big|_{k_1=\dots=k_N=0} = -\frac{1}{i}\sum_j G_{ij}k_j\big|_{k_j=0} = 0, && (32) \\
\langle \xi_i^2 \rangle - \langle \xi_i \rangle^2 &= -\frac{d^2}{dk_i^2}\phi(k_1, \dots, k_N)\big|_{k_1=\dots=k_N=0} = G_{ii}, && (33) \\
\langle \xi_i \xi_j \rangle &= -\frac{d^2}{dk_i dk_j}\phi(k_1, \dots, k_N)\big|_{k_1=\dots=k_N=0} = G_{ij}. && (34)
\end{aligned}$$