Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik II (WS 2024/25)

Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian Reich

Blatt 12
Abgabe 31.01.2025, Besprechung 04.02.2025

Die Anmeldung zum Übungsschein und zur ersten Klausur ist ab jetzt bis zum 14.02.2025 im Campus-System möglich. Bitte melden Sie sich zeitnah an.

---

1. Innere Energie von Fermigasen (2 Punkte)

Zeigen Sie, ausgehend von der großkanonischen Zustandssumme für das ideale Fermigas

$$Z_G = \prod_\lambda \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)}\right), \tag{1}$$

dass die innere Energie U gegeben ist durch

$$U = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda n_F(\varepsilon_\lambda) \tag{2}$$

mit der Fermi-Verteilungsfunktion $n_F(\varepsilon_\lambda) = (e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} + 1)^{-1}$.

Lösungsvorschlag

Auf dem letzten Übungsblatt haben wir aus der allgemeinen Definition der großkanonischen Zustandssumme gesehen, dass sich die innere Energie aus

$$U = -\left(\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \beta}\right)_z \tag{3}$$

ergibt (mit der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$). Mit dem gegebenen $Z_G = \prod_\lambda Z_\lambda$ für das ideale Fermigas erhalten wir dann

$$U = -\frac{1}{Z_G}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\prod_\lambda Z_\lambda\right)_z = -\frac{1}{Z_G}\sum_\lambda \left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial \beta}\right)_z \frac{Z_G}{Z_\lambda} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \frac{e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}} \tag{4}$$

$$= \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}+1} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda n_F(\varepsilon_\lambda). \tag{5}$$

2. Zustandsdichte (3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$ mittels einer Variablentransformation im Integral über den Impuls eines Teilchens in d Dimensionen

$$\frac{d^d p}{(2\pi\hbar)^d} = \nu(\varepsilon) d\varepsilon \tag{6}$$

eingeführt. Überzeugen Sie sich für ein isotropes System aus Teilchen mit einer Dispersionsrelation $\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \alpha|\boldsymbol{p}|^n$, $n = 1, 2, \ldots$, dass dies äquivalent ist zur Definition

$$\nu(\varepsilon) = \int \frac{d^d p}{(2\pi\hbar)^d}\, \delta(\varepsilon - \varepsilon(\boldsymbol{p})). \tag{7}$$

Lösungsvorschlag

Wir betrachten ein Integral der Form

$$I = \int \frac{d^d p}{(2\pi\hbar)^d} f(\boldsymbol{p}) \tag{8}$$

mit einer beliebigen Funktion $f(\boldsymbol{p}) = f(p)$ mit $p = |\boldsymbol{p}|$ (Isotropie). Wir wechseln in Kugelkoordinaten, substituieren die Integrationsvariable $p \to \varepsilon(p) = \alpha p^n$ und erhalten damit

$$I = \frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d} \int_0^\infty dp\, p^{d-1} f(p) = \frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d} \int_0^\infty d\varepsilon \left(\frac{d\varepsilon}{dp}\right)^{-1} p(\varepsilon)^{d-1} f(p(\varepsilon)) \tag{9}$$

$$= \frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d} \int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{\varepsilon^{\frac{d}{n}-1} f(\varepsilon)}{n\alpha^{\frac{d}{n}}} \tag{10}$$

mit dem Raumwinkel Ω_d.

Betrachten wir nun die gegebene Definition der Zustandsdichte

$$\nu(\varepsilon) = \int \frac{d^d p}{(2\pi\hbar)^d}\, \delta(\varepsilon - \varepsilon(\boldsymbol{p})) = \frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d} \int_0^\infty dp\, p^{d-1} \delta(\varepsilon - \varepsilon(p)) \tag{11}$$

und nutzen $\delta(g(x)) = \sum_i \delta(x - x_i)/|g'(x)|$ mit den (einfachen) Nullstellen x_i von $g(x)$, so erhalten wir

$$\nu(\varepsilon) = \frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d} \int_0^\infty dp\, p^{d-1} \left|\frac{d\varepsilon(p)}{dp}\right|^{-1} \delta\Big(p - (\varepsilon/\alpha)^{1/n}\Big) \tag{12}$$

$$= \frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d} \int_0^\infty dp\, p^{d-n} \frac{\delta(p - (\varepsilon/\alpha)^{1/n})}{n\alpha} = \frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d} \frac{\varepsilon^{\frac{d}{n}-1}}{n\alpha^{\frac{d}{n}}}, \tag{13}$$

was genau unserem Ergebnis von oben entspricht, wenn wir schreiben

$$I = \int \frac{d^d p}{(2\pi\hbar)^d} f(\boldsymbol{p}) = \int d\varepsilon\, \nu(\varepsilon) f(\varepsilon). \tag{14}$$

3. Fermigase bei $T = 0$ **(15 Punkte)**

Wir betrachten ein Gas aus $N \gg 1$ nichtwechselwirkenden Elektronen (mit Masse m und Spin $\frac{1}{2}$). Bei der Temperatur $T = 0$ sind die Zustände bis zu einer Energie E_F und einem Impuls p_F besetzt, der sogenannten Fermienergie und dem Fermiimpuls. Berechnen Sie E_F, p_F und die Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$, sowie die innere Energie U und den Druck $P = -(\partial U/\partial V)_N$ bei $T = 0$ als eine Funktion von N und V für

a) nicht-relativistische Elektronen mit der Dispersion $\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^2/2m$ im 3-dimensionalen Volumen $V = L^3$.
Berechnen Sie zudem die Fermitemperatur $T_F = E_F/k_B$ und vergleichen Sie sie mit der üblichen Raumtemperatur. Nehmen Sie dazu eine Teilchenzahldichte von $n = N/V = 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}$ an. (4 Punkte)

b) nicht-relativistische Elektronen mit der Dispersion $\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^2/2m$ im 2-dimensionalen Volumen $V = L^2$.
Bestimmen Sie zudem einen Ausdruck für das chemische Potential als Funktion der Temperatur und der Teilchenzahldichte $\mu(T, n)$. Drücken Sie dazu die Teilchenzahl N als Funktion von T, V und μ mithilfe eines Integrals über die Fermi-Verteilungsfunktion $n_F(\varepsilon)$ aus. Skizzieren Sie $\mu(T)$ und bestimmen Sie die Temperatur T_0, für die $\mu(T_0) = 0$ gilt. (8 Punkte)

c) ultrarelativistische Elektronen mit der Dispersion $\varepsilon(\boldsymbol{p}) = c|\boldsymbol{p}|$ im 2-dimensionalen Volumen $V = L^2$. (3 Punkte)

Lösungsvorschlag

Die Teilchenzahl N ergibt sich als Summe über die Besetzungszahlen aller Ein-Teilchen-Niveaus

$$N = 2\sum_p n_F(\varepsilon_p) \longrightarrow 2V\int \frac{d^dp}{(2\pi\hbar)^3} n_F(\varepsilon(p)) = 2V\frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d}\int_0^\infty dp\, p^{d-1} n_F(\varepsilon(p)), \quad (15)$$

wobei der Faktor 2 die Spin-Entartung berücksichtigt. Bei $T = 0$ entspricht die Fermi-Verteilung einer Stufenfunktion $n_F(\varepsilon(p))|_{T=0} = \Theta(p_F - p)$ und wir erhalten

$$N = 2V\frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d}\int_0^{p_F} dp\, p^{d-1} = 2V\frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d}\frac{p_F^d}{d}. \quad (16)$$

Damit können wir den Fermiimpuls mittels N und V ausdrücken

$$p_F = 2\pi\hbar\left(\frac{d}{2\Omega_d}\frac{N}{V}\right)^{1/d}. \quad (17)$$

Für eine Dispersionsrelation $\varepsilon(p) = \alpha p^n$ ist die Fermienergie dann

$$E_F = \varepsilon(p_F) = \alpha(2\pi\hbar)^n\left(\frac{d}{2\Omega_d}\frac{N}{V}\right)^{n/d}. \quad (18)$$

Die innere Energie bei $T = 0$ ergibt sich entsprechend aus

$$U = 2V\frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d}\int_0^{p_F} dp\, p^{d-1}\varepsilon(p) = 2\alpha V\frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d}\frac{p_F^{d+n}}{d+n} \quad (19)$$

$$= \frac{2\alpha}{d+n}\left(\frac{d}{2}\right)^{1+\frac{n}{d}}(2\pi\hbar)^n\,\Omega_d^{-\frac{n}{d}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{n}{d}} N. \quad (20)$$

Für die Zustandsdichte haben wir in Aufgabe 2 bereits gesehen

$$\nu(\varepsilon) = 2\frac{\Omega_d}{(2\pi\hbar)^d}\frac{\varepsilon^{\frac{d}{n}-1}}{n\alpha^{\frac{d}{n}}}, \quad (21)$$

wobei wir mit dem Faktor 2 wieder den Spin berücksichtigen. Damit ist die meiste Arbeit schon erledigt und wir müssen für jede Teilaufgabe lediglich die entsprechenden Werte einsetzen.

a) Es ist $d = 3$, $\Omega_{d=3} = 4\pi$, $n = 2$ und $\alpha = 1/2m$. Also

$$p_F = 2\pi\hbar\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{1/3}, \quad E_F = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3}, \quad \nu(\varepsilon) = \frac{\sqrt{(2m)^3}}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{\varepsilon}, \quad (22)$$

sowie

$$U = \frac{3^{5/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{10m}\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}, \quad P = \frac{3^{5/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{15m}\frac{N^{5/3}}{V^{5/3}}. \quad (23)$$

Setzen wir zudem für die Fermitemperatur Zahlenwerte ein mit $N/V = 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}$ und m der Elektronenmasse, erhalten wir

$$T_F = \frac{1}{k_B}\frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \simeq 9\cdot 10^4\,\mathrm{K}, \quad (24)$$

was um mehrere Größenordnungen größer ist als die Zimmertemperatur $\sim 300\,\mathrm{K}$. Thermische Effekte können aus diesem Grund in Metallen selbst bei Zimmertemperatur oft störungstheoretisch behandelt werden.

b) Es ist $d = 2$, $\Omega_{d=2} = 2\pi$, $n = 2$ und $\alpha = 1/2m$. Damit haben wir

$$p_F = \hbar\sqrt{2\pi N/V}, \quad E_F = \frac{\hbar^2 \pi N}{mV}, \quad \nu(\varepsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2}, \tag{25}$$

sowie

$$U = \frac{\pi\hbar^2}{2m}\frac{N^2}{V}, \quad P = \frac{\pi\hbar^2}{2m}\frac{N^2}{V^2}. \tag{26}$$

Wir möchten nun noch den Zusammenhang zwischen Temperatur und chemischem Potential finden. Es ist

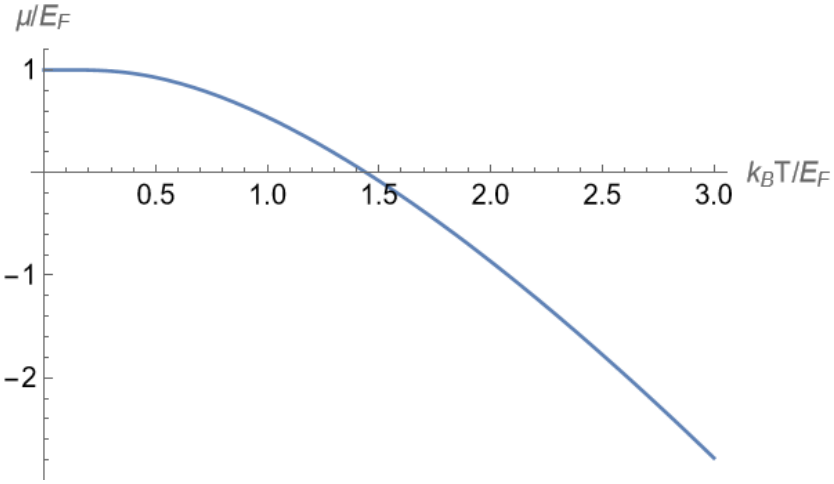
$$N = V\int_0^\infty d\varepsilon\, \nu(\varepsilon) n_F(\varepsilon) = \frac{mV}{\pi\hbar^2}\int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \tag{27}$$

$$= \frac{mV}{\beta\pi\hbar^2}\int_{-\beta\mu}^\infty \frac{dx}{e^x+1} = \frac{mV}{\beta\pi\hbar^2}\ln(1+e^{\beta\mu}). \tag{28}$$

Dies können wir nach μ umstellen und erhalten

$$\mu(T) = k_B T \ln\left(e^{\frac{\pi\hbar^2}{mk_BT}\frac{N}{V}} - 1\right) = k_B T \ln\left(e^{E_F/k_BT} - 1\right). \tag{29}$$

In folgender Abbildung ist der Verlauf skizziert, die Nullstelle befindet sich bei $k_B T_0 = E_F/\ln 2$.



c) Mit $d = 2$, $n = 1$ und $\alpha = c$ bekommen wir

$$p_F = \hbar\sqrt{2\pi N/V}, \quad E_F = c\hbar\sqrt{2\pi N/V}, \quad \nu(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi\hbar^2 c^2}, \tag{30}$$

$$U = \frac{2\sqrt{2\pi}c\hbar}{3}\frac{N^{3/2}}{\sqrt{V}}, \quad P = \frac{\hbar c}{3}\sqrt{2\pi\frac{N^3}{V^3}}. \tag{31}$$