

Moderne Theoretische Physik II (WS 2024/25)

Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian ReichLösungen zu Blatt 13
Besprechung 11.02.2025

1. Chemisches Potential eines Elektronengases (6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie für ein ideales Gas nicht-relativistischer Elektronen in drei Dimensionen gesehen, dass das chemische Potential $\mu(T)$ bei kleinen Temperaturen $k_B T \ll E_F$ sich verhält wie

$$\mu(T) \simeq E_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right). \quad (1)$$

Bestimmen Sie das entsprechende Verhalten bei kleinen Temperaturen $k_B T \ll E_F$ für

- nicht-relativistische Elektronen ($\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$) in zwei Dimensionen (siehe letztes Übungsblatt). (1 Punkt)
- ultrarelativistische Elektronen ($\varepsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|$) in drei Dimensionen. (5 Punkte)

Lösungsvorschlag

- In Aufgabe 3b des letzten Übungsblattes haben wir für diesen Fall gesehen (für beliebige Temperaturen)

$$\mu(T) = k_B T \ln \left(e^{E_F/k_B T} - 1 \right). \quad (2)$$

Diese Funktion ist nicht analytisch bei $k_B T/E_F = 0$. Um das asymptotische Verhalten für $E_F \gg k_B T$ trotzdem zu finden, schreiben wir

$$\ln \left(e^{E_F/k_B T} - 1 \right) = \ln \left(e^{E_F/k_B T} \left(1 - e^{-E_F/k_B T} \right) \right) = \frac{E_F}{k_B T} + \ln \left(1 - e^{-E_F/k_B T} \right) \quad (3)$$

und nutzen $\ln(1-x) \approx -x$ für $x \ll 1$, sodass folgt

$$\mu(T) \simeq E_F \left(1 - \frac{k_B T}{E_F} e^{-E_F/k_B T} \right). \quad (4)$$

- Nutzen wir die Formeln, die wir in Aufgabe 2 des letzten Übungsblattes erhalten hatten, so finden wir für die Zustandsdichte

$$\nu(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \quad (5)$$

und die Fermi-Energie

$$E_F = \hbar c \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

Die Teilchenzahl können wir ausdrücken mittels

$$N(T, V, \mu) = V \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) n_F(\varepsilon). \quad (7)$$

Wir nähern das Integral mithilfe der Sommerfeld-Entwicklung und erhalten

$$N \approx V \int_0^\mu \nu(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} k_B^2 T^2 \nu'(\mu) = V \frac{\mu}{3\pi^2 \hbar^3 c^3} (\mu^2 + \pi^2 k_B^2 T^2) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \mu(\mu^2 + \pi^2 k_B^2 T^2) - E_F^3 = 0. \quad (9)$$

Wir sehen (wie erwartet) $\mu(T=0) = E_F$ und schreiben deshalb $\mu(T)/E_F \approx 1 + \delta$ mit der kleinen Korrektur bei niedrigen Temperaturen $\delta \ll 1$. Bis zur ersten Ordnung in δ erhalten wir damit aus obiger Gleichung

$$\delta = -\frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{3E_F^2 + \pi^2 k_B^2 T^2} \approx -\frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{3E_F^2}, \quad (10)$$

und folglich

$$\mu(T) \simeq E_F \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right). \quad (11)$$

2. Ideales Bose-Gas in zwei Dimensionen

(8 Punkte)

Wir betrachten nicht-wechselwirkende Bosonen im 2-dimensionalen Volumen V mit der Dispersionsrelation $\varepsilon(\mathbf{p}) = \alpha |\mathbf{p}|^\kappa$ ($\alpha, \kappa > 0$) bei einer Temperatur $T > 0$.

- Berechnen Sie die Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$. Geben Sie mithilfe der Zustandsdichte einen Integralausdruck für die Teilchendichte $\langle N \rangle(T, V, \mu)/V$ an (zunächst ohne Kondensation zu berücksichtigen). (2 Punkte)
- Geben Sie ein physikalisches Argument dafür, dass der in Teilaufgabe a) gefundene Integralausdruck für manche Werte von κ nicht korrekt ist. Bestimmen Sie die κ , für die das der Fall ist. Wie kann der Fehler für diese Werte von κ korrigiert werden? (6 Punkte)

Lösungsvorschlag

- Für die Zustandsdichte können wir wieder auf das letzte Übungsblatt verweisen. Es gilt

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi \hbar^2} \frac{\varepsilon^{2/\kappa-1}}{\kappa \alpha^{2/\kappa}}. \quad (12)$$

Die Teilchenzahldichte kann geschrieben werden als

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) n_B(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi \hbar^2 \kappa \alpha^{2/\kappa}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{2/\kappa-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}. \quad (13)$$

- Wir nehmen an, dass wir die Teilchenzahldichte $n = N/V$ bei einer gegebenen Temperatur beliebig manipulieren können, indem wir einer Box mit festem Volumen nach und nach Teilchen hinzufügen. Wir interpretieren deshalb Gleichung (13) als eine Bestimmungsgleichung für das chemische Potential $\mu(T, V, N)$ und erwarten, dass es für beliebige Werte der Argumente definiert ist. Erhöhen von N bei festem T und V führt zu einer Erhöhung von μ , da der Integrand für jeden Wert von ε monoton mit μ wächst. Wir wissen allerdings, dass μ nach oben von $\varepsilon_{\min} = 0$ beschränkt ist. Die maximal "erlaubte" Teilchenzahldichte nach (13) ist deshalb gegeben durch

$$n_{\max} = \frac{1}{2\pi \hbar^2 \kappa \alpha^{2/\kappa}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{2/\kappa-1}}{e^{\beta\varepsilon} - 1}. \quad (14)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist der Integrand proportional zu $\varepsilon^{2/\kappa-2}$. Es folgt deshalb:

Für $\kappa \geq 2$ divergiert das Integral, während $n(\mu < 0)$ endlich ist. Folglich können wir für jeden beliebigen Wert von n einen entsprechenden Wert μ finden: in zwei Dimensionen findet also insbesondere für eine nicht-relativistische Dispersionsrelation $\varepsilon \propto p^2$ keine Bose-Einstein-Kondensation statt.

Für $\kappa < 2$ dagegen konvergiert das Integral. Dies impliziert, dass die Teilchendichte nicht über einen Grenzwert $n_{\max} < \infty$ hinaus erhöht werden könnte, was unserer obigen physikalischen Erwartung widerspricht. Wir schlussfolgern, dass Gleichung (13) für $\kappa < 2$ nicht korrekt ist.

Grund dafür ist, dass für $\mu \rightarrow 0$, beim Übergang von der Summe über alle Einteilchenenergien zum Integral über ε , der Beitrag des Grundzustands nicht korrekt gewichtet wird, da μ kleiner wird als der Abstand zwischen benachbarten Energieniveaus. Die Lösung besteht darin, die Grundzustandsbesetzung, die für $\mu \rightarrow 0$ divergiert, gesondert zu betrachten und Gleichung (13) zu ersetzen durch

$$n = n_0 + \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) n_B(\varepsilon) \quad (15)$$

mit $n_0 = (e^{-\beta\mu} - 1)^{-1}$.

3. Ideales Bose-Gas im Oszillatorpotential

(6 Punkte)

Wir betrachten $N \gg 1$ Bosonen im Potential eines 3-dimensionalen (kugelsymmetrischen) harmonischen Oszillators. Die Einteilchenenergien lauten demnach $\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2)$ mit den Quantenzahlen $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$. Das niedrigste Niveau hat also die Energie $\varepsilon_{000} = 3\hbar\omega/2$.

Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c , unterhalb derer $T \leq T_c$ eine makroskopische Besetzung N_0 des Grundzustands erfolgt. Nehmen Sie dafür $k_B T \gg \hbar\omega$ an, um Summen über die Quantenzahlen in Integrale zu überführen. Zeigen Sie, dass für $T \leq T_c$ gilt

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3. \quad (16)$$

Lösungsvorschlag

Die Kondensation erfolgt beim maximal möglichen Wert des chemischen Potentials $\mu \rightarrow \mu_c = \varepsilon_{000}$. Die Teilchenzahl für $T \leq T_c$ können wir dann schreiben als

$$N = N_0 + \int_0^\infty dn_x dn_y dn_z \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega(n_x+n_y+n_z)} - 1} \quad (17)$$

mit der Grundzustandsbesetzungszahl N_0 , die wir, wie in Aufgabe 2 gesehen, gesondert betrachten müssen. Den Integranden schreiben wir als geometrische Reihe

$$\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega(n_x+n_y+n_z)} - 1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l\beta\hbar\omega(n_x+n_y+n_z)}, \quad (18)$$

sodass folgt

$$N = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 \sum_{l=1}^{\infty} l^{-3} = N_0 + \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 \quad (19)$$

mit $\zeta(3) \approx 1,2$. Die kritische Temperatur ist dann erreicht, wenn $N_0 \rightarrow 0$, also

$$k_B T_c = \hbar\omega(N/\zeta(3))^{1/3} \quad (20)$$

und damit ergibt sich durch Umstellen von (19)

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \quad (21)$$

(im Gegensatz zum Fall freier Bosonen, wo der Exponent 3/2 lautet).