

# Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 2

Abgabe: 07.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 11.11.2025

## Aufgabe 1: (\*) Zerfall eines Tritiumkerns (4 Punkte)

Ein Tritiumkern ( ${}^3\text{H}$ ) verwandelt sich durch  $\beta$ -Zerfall in einem Heliumkern ( ${}^3\text{He}$ ). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, das sich im Grundzustand des Tritiumatoms befand, im  $2s$ -Zustand des Heliumatoms gefunden wird.

## Aufgabe 2: (\*) Magnetische Resonanz ( $2 + 2 + 2 = 6$ Punkte)

Betrachten Sie ein Spin-1/2-Teilchen in einem Magnetfeld mit konstanter Komponente in  $z$ -Richtung und einer mit Frequenz  $\omega$  in der  $xy$ -Ebene rotierenden Komponente. Der Hamilton-Operator für dieses System lautet:

$$\begin{aligned}H(t) &= H_0 + V(t), \\H_0 &= \omega_0 S_z, \\V(t) &= \omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y,\end{aligned}$$

wobei  $S_i$  mit  $i = x, y, z$  die Komponenten des Spin-Operators bezeichnet.

- Bestimmen Sie den Hamilton-Operator  $H_I(t)$ , der die Dynamik im Wechselwirkungsbild charakterisiert.
- Bestimmen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert  $\langle \vec{S} \rangle(t)$  für den Fall  $\omega = \omega_0$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich das System im Grundzustand von  $H_0$ . Berechnen Sie dafür zuerst die Wellenfunktion  $|\psi_I(t)\rangle$  im Wechselwirkungsbild.
- Für die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung erweist es sich als vorteilhaft, eine andere Aufteilung des Hamilton-Operators zu wählen:

$$\begin{aligned}H(t) &= H'_0 + V'(t), \\H'_0 &= \omega S_z, \\V'(t) &= (\omega_0 - \omega) S_z + V(t).\end{aligned}$$

Im Wechselwirkungsbild lautet dann der Hamilton-Operator

$$V'_I(t) = e^{iH'_0 t/\hbar} V'(t) e^{-iH'_0 t/\hbar}.$$

Bestimmen Sie nun den Erwartungswert  $\langle S_z \rangle(t)$  für beliebiges  $\omega$ , wobei sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  wieder im Grundzustand von  $H_0$  befindet.

### Aufgabe 3: Freies Elektron im elektrischen Feld

Wir betrachten ein Elektron in einem zeitlich konstanten elektrischen Feld  $\vec{\varepsilon} = -\varepsilon\hat{x}$  in  $(-x)$ -Richtung, wobei  $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}|$ .

- Das Elektron soll sich in positive  $x$ -Richtung bewegen. Geben Sie den Ausdruck für die Kraft auf das Elektron an. Wie sehen das zugehörige Potential und der Hamiltonoperator aus?
- Zuerst soll das stationäre Problem gelöst werden. Zeigen Sie, dass sich mit der folgenden Variablentransformation

$$y = \frac{1}{l_{e\varepsilon}}(x + x_E) \quad \text{mit} \quad x_E = \frac{E}{e\varepsilon} \quad \text{und} \quad l_{e\varepsilon} = \left(\frac{2me\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

das Eigenwertproblem  $H\Psi = E\Psi$  zu

$$(\partial_y^2 + y)\Psi(y) = 0$$

vereinfacht.

Die Lösung für diese Differentialgleichung ist

$$\Psi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi e\varepsilon l_{e\varepsilon}}} \text{Ai}\left(-\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)$$

mit der Airy Funktion  $\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\vartheta \cos\left(\frac{\vartheta^3}{3} - \vartheta x\right)$ .

Eine zweite Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, ist, das konstante elektrische Feld durch das Vektorpotential  $\vec{A}$  und das Skalarpotential  $\varphi$  auszudrücken. Wir wählen  $\varphi = 0$ , wodurch sich das Vektorpotential über den Zusammenhang  $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A}$  ergibt.

- Geben Sie die zeitabhängige Schrödinger Gleichung für ein geladenes Teilchen mit Ladung  $q = -e$  in einem elektromagnetischen Feld an. Setzen Sie dann  $\varphi = 0$ , bestimmen Sie das Vektorpotential über  $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A}$  und lösen Sie die Schrödinger-Gleichung.

*Hinweis:* Benutzen Sie für die Wellenfunktion den Ansatz  $\Psi_p(x, t) = X_p(x)\varphi_p(t)$ .

Nun wollen wir die Beziehung zwischen den beiden Lösungen,  $\Psi_E(x, t) = \Psi_E(x) \exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$  (stationäre Lösung mit Zeitentwicklungsoperator) und  $\Psi_p(x, t)$  (nicht-stationäre Lösung), finden.

- Finden Sie die Eichtransformation, die die Hamiltonoperatoren der beiden Teilaufgaben ineinander überführt. Geben Sie die Ausdrücke für die transformierten Felder und Wellenfunktionen,  $A'$ ,  $\varphi'$  and  $\Psi'_p(x, t)$ , an.
- Die beiden Lösungen  $\Psi'_p(x, t)$  und  $\Psi_E(x, t)$  sind beides Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung des gleichen Hamiltonoperators, sie bilden also jeweils einen vollständigen, orthogonales Satz von Basisvektoren und können dementsprechend ineinander übergeführt werden. Zeigen Sie, dass für den Fall  $t = 0$  folgende Beziehung gilt:

$$\Psi_E(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} a_E(p) \Psi'_p(x, 0),$$
$$a_E(p) = \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \exp\left[-\frac{ip}{\hbar e\varepsilon} \left(\frac{p^2}{6m} - E\right)\right].$$