

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 2

Abgabe: 07.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 11.11.2025

Aufgabe 1: (*) Zerfall eines Tritiumkerns (4 Punkte)

Ein Tritiumkern (${}^3\text{H}$) verwandelt sich durch β -Zerfall in einem Heliumkern (${}^3\text{He}$). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, das sich im Grundzustand des Tritiumatoms befand, im $2s$ -Zustand des Heliumatoms gefunden wird.

Solution

The decay will be described in the "Sudden approximation". The ground state of the tritium is $|\Psi_1\rangle = |1S_{3H}\rangle$ and the $2s$ state of the Helium is $|\Psi_2\rangle = |2S_{3He}\rangle$. We can write the wave function as a radial part and an angular part. The radial part is given for arbitrary Z (see Schwabl, Quantenmechanik, page 132) by

$$R_{10}(r) = 2 * \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0},$$
$$R_{20}(r) = 2 * \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/(2a_0)}.$$

Therefore, we have for the tritium

$$\langle x|\Psi_1\rangle = R_{10}(r)Y_{00}(\Theta, \phi),$$

and for the Helium

$$\langle x|\Psi_2\rangle = R_{20}(r)Y_{00}(\Theta, \phi).$$

The transition probability is then obtained by

$$P_{\Psi_1 \rightarrow \Psi_2} = |\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle|^2,$$

with

$$\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle = \int_0^\infty dr r^2 \int d\Omega \frac{1}{4\pi} \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) = -\frac{1}{2},$$

which then leads to

$$P_{\Psi_1 \rightarrow \Psi_2} = |\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle|^2 = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 2: (*) Magnetische Resonanz (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Betrachten Sie ein Spin-1/2-Teilchen in einem Magnetfeld mit konstanter Komponente in z -Richtung und einer mit Frequenz ω in der xy -Ebene rotierenden Komponente. Der Hamilton-Operator für dieses System lautet:

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0 + V(t), \\ H_0 &= \omega_0 S_z, \\ V(t) &= \omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y, \end{aligned}$$

wobei S_i mit $i = x, y, z$ die Komponenten des Spin-Operators bezeichnet.

- a) Bestimmen Sie den Hamilton-Operator $H_I(t)$, der die Dynamik im Wechselwirkungsbild charakterisiert.

Solution

$$H_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$$

We can write V as

$$V(t) = \omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y = \frac{\omega_1 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix},$$

In addition, we can simplify the exponential function as

$$e^{iH_0 t/\hbar} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{iH_0 t}{\hbar} \right)^n = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega_0 t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} \end{pmatrix},$$

where we have used $\sigma_z^2 = \mathbb{I}$. Finally, $H_I(t)$ can be obtained by matrix multiplication

$$H_I(t) = \frac{\omega_1 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\omega_0 - \omega)t} \\ e^{-i(\omega_0 - \omega)t} & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Bestimmen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle \vec{S} \rangle(t)$ für den Fall $\omega = \omega_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand von H_0 . Berechnen Sie dafür zuerst die Wellenfunktion $|\psi_I(t)\rangle$ im Wechselwirkungsbild.

Solution

We write the expectation value $\langle \vec{S} \rangle(t)$ as

$$\langle \vec{S} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \vec{S} | \psi(t) \rangle = \langle \psi_I(t) | \vec{S}_I(t) | \psi_I(t) \rangle,$$

where $\vec{S}_I(t)$ is given by

$$\vec{S}_I(t) = e^{iH_0t/\hbar} \vec{S} e^{-iH_0t/\hbar},$$

and the wave function in the interaction picture is obtained from the differential equation

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = H_I(t) |\psi_I(t)\rangle.$$

We write the wave function as

$$|\psi_I(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix},$$

so that we get the following differential equations for $\omega = \omega_0$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_+(t) &= \frac{\omega_1 \hbar}{2} c_-(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_-(t) &= \frac{\omega_1 \hbar}{2} c_+(t). \end{aligned}$$

Applying $i \frac{d}{dt}$ on the first equation and inserting the second equation into the first one (and vice-versa) leads to

$$-\frac{d^2}{dt^2} c_{\pm}(t) = \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 c_{\pm}(t).$$

By specifying the boundary condition as $c_+(0) = 0$ and $c_-(0) = 1$, the solution is given by

$$c_+(t) = -i \sin\left(\frac{\omega_1}{2}t\right) \quad \text{and} \quad c_-(t) = \cos\left(\frac{\omega_1}{2}t\right).$$

The wave function in the Schrödinger picture can then be obtained by

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0t/\hbar} |\psi_I(t)\rangle.$$

The expectation values are then given by

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle(t) &= \langle \psi(t) | S_x | \psi(t) \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_1 t) \\ \langle S_y \rangle(t) &= \langle \psi(t) | S_y | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_1 t) \\ \langle S_z \rangle(t) &= \langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle = -\frac{\hbar}{2} \cos(\omega_1 t) \end{aligned}$$

c) Für die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung erweist es sich als vorteilhaft, eine

andere Aufteilung des Hamilton-Operators zu wählen:

$$\begin{aligned} H(t) &= H'_0 + V'(t), \\ H'_0 &= \omega S_z, \\ V'(t) &= (\omega_0 - \omega) S_z + V(t). \end{aligned}$$

Im Wechselwirkungsbild lautet dann der Hamilton-Operator

$$V'_I(t) = e^{iH'_0 t/\hbar} V'(t) e^{-iH'_0 t/\hbar}.$$

Bestimmen Sie nun den Erwartungswert $\langle S_z \rangle(t)$ für beliebiges ω , wobei sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ wieder im Grundzustand von H_0 befindet.

Solution

The solution is obtained in a similar way as in b). The Hamiltonian in the interaction picture is obtained by

$$H_I(t) = e^{iH'_0 t/\hbar} V'(t) e^{-iH'_0 t/\hbar} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} (\omega_0 - \omega) & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_+(t) &= \frac{(\omega_0 - \omega)\hbar}{2} c_+(t) + \frac{\omega_1 \hbar}{2} c_-(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_-(t) &= -\frac{(\omega_0 - \omega)\hbar}{2} c_-(t) + \frac{\omega_1 \hbar}{2} c_+(t). \end{aligned}$$

Now take second derivative in t on the first diff. eq. and substitute $c'_+(t)$ and $c'_-(t)$ from above, we have the second-order diff. eq.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} c_+(t) + \Omega^2 c_+(t) = 0, \quad \text{with } \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}.$$

Given the boundary condition $c_+(0) = 0$ and $c_-(0) = 1$, we can have the following solution

$$\begin{aligned} c_+(t) &= -i \frac{\omega_1}{2\Omega} \sin(\Omega t), \\ c_-(t) &= i \frac{\omega_0 - \omega}{2\Omega} \sin(\Omega t) + \cos(\Omega t). \end{aligned}$$

The wave function in the Schrödinger picture is then given by

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |\psi_I(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\omega t}{2}} c_+(t) \\ e^{\frac{i\omega t}{2}} c_-(t) \end{pmatrix},$$

and the scalar product gives

$$\langle S_z \rangle(t) = -\frac{\hbar}{2} \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2 \cos(2\Omega t)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}$$

Aufgabe 3: Freies Elektron im elektrischen Feld

Wir betrachten ein Elektron in einem zeitlich konstanten elektrischen Feld $\vec{\varepsilon} = -\varepsilon\hat{x}$ in $(-x)$ -Richtung, wobei $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}|$.

- Das Elektron soll sich in positive x -Richtung bewegen. Geben Sie den Ausdruck für die Kraft auf das Elektron an. Wie sehen das zugehörige Potential und der Hamiltonoperator aus?
- Zuerst soll das stationäre Problem gelöst werden. Zeigen Sie, dass sich mit der folgenden Variablentransformation

$$y = \frac{1}{l_{e\varepsilon}}(x + x_E) \quad \text{mit} \quad x_E = \frac{E}{e\varepsilon} \quad \text{und} \quad l_{e\varepsilon} = \left(\frac{2me\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

das Eigenwertproblem $H\Psi = E\Psi$ zu

$$(\partial_y^2 + y)\Psi(y) = 0$$

vereinfacht.

Die Lösung für diese Differentialgleichung ist

$$\Psi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi e\varepsilon l_{e\varepsilon}}} \text{Ai}\left(-\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)$$

mit der Airy Funktion $\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\vartheta \cos\left(\frac{\vartheta^3}{3} - \vartheta x\right)$.

Eine zweite Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, ist, das konstante elektrische Feld durch das Vektorpotential \vec{A} und das Skalarpotential φ auszudrücken. Wir wählen $\varphi = 0$, wodurch sich das Vektorpotential über den Zusammenhang $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A}$ ergibt.

- Geben Sie die zeitabhängige Schrödinger Gleichung für ein geladenes Teilchen mit Ladung $q = -e$ in einem elektromagnetischen Feld an. Setzen Sie dann $\varphi = 0$, bestimmen Sie das Vektorpotential über $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A}$ und lösen Sie die Schrödinger-Gleichung.

Hinweis: Benutzen Sie für die Wellenfunktion den Ansatz $\Psi_p(x, t) = X_p(x)\varphi_p(t)$.

Nun wollen wir die Beziehung zwischen den beiden Lösungen, $\Psi_E(x, t) = \Psi_E(x) \exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$ (stationäre Lösung mit Zeitentwicklungsoperator) und $\Psi_p(x, t)$ (nicht-stationäre Lösung), finden.

- Finden Sie die Eichtransformation, die die Hamiltonoperatoren der beiden Teilaufgaben ineinander überführt. Geben Sie die Ausdrücke für die transformierten Felder und Wellenfunktionen, A' , φ' and $\Psi'_p(x, t)$, an.
- Die beiden Lösungen $\Psi'_p(x, t)$ und $\Psi_E(x, t)$ sind beides Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung des gleichen Hamiltonoperators, sie bilden also jeweils einen vollständigen, orthogonales Satz von Basisvektoren und können dementsprechend ineinander übergeführt werden. Zeigen Sie, dass für den Fall $t = 0$ folgende Beziehung gilt:

$$\Psi_E(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} a_E(p) \Psi'_p(x, 0),$$

$$a_E(p) = \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \exp\left[-\frac{ip}{\hbar e\varepsilon} \left(\frac{p^2}{6m} - E\right)\right].$$

Solution

1. The force on the electron is $F = e\varepsilon = -\partial_x V$. Our Potential is therefore $V(x) = -e\varepsilon x$ and the Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - e\varepsilon x = \frac{p^2}{2m} - e\varepsilon x$$

2. We start with the eigenvalue problem

$$\begin{aligned} H\Psi_E &= E\Psi_E \\ \implies \left[\partial_x^2 + \frac{1}{l_{e\varepsilon}^2}(x + x_E) \right] \Psi_E &= 0 \end{aligned}$$

Using the substitution given above we can calculate

$$\partial_x^2 = \frac{1}{l_{e\varepsilon}^2}\partial_y^2$$

and our equation simplifies to

$$(\partial_y^2 + y)\Psi_E = 0.$$

3. The Hamiltonian is

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\varphi = \frac{(\vec{p} + e\varepsilon t\hat{x})^2}{2m} = H(t)$$

with $q = -e$, $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A} \implies \vec{A} = -\vec{\varepsilon}t$ and $\varphi = 0$. We solve the time dependent Schrödinger equation $i\hbar\partial_t\Psi(x, t) = H\Psi(x, t)$ with the following ansatz

$$\Psi_p(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}px}\varphi_p(t).$$

This leads to the following differential equation for $\varphi_p(t)$

$$i\hbar\partial_t\varphi_p(t) = \frac{(p + e\varepsilon t)^2}{2m}\varphi_p(t)$$

with the solution $\varphi_p(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \frac{(p + e\varepsilon t')^2}{2m}\right]$ and therefore our total solution are the so called Houghon functions

$$\Psi(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \int_0^t dt' \frac{(p + e\varepsilon t')^2}{2m}\right)\right].$$

Solution

4. Our Hamiltonian was $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2$ with $\vec{A} = -\vec{e}t$ and $\varphi = 0$. We want our $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi = 0$ which leads to

$$\nabla\chi = \vec{e}t = -\varepsilon t\hat{x} \implies \chi = -\varepsilon tx$$

We can define now our gauge transformed scalar field and there from the potential of our system

$$\varphi' = \varphi - \partial_t\chi = \varepsilon x \implies V(x) = q\varphi'(x) = -e\varepsilon x.$$

The wave function changes to

$$\Psi'_p = \Psi_p \exp\left[\frac{iq}{\hbar}\chi\right] = \Psi_p \exp\left[\frac{ie}{\hbar}\varepsilon tx\right]$$

and is the solution to the Hamiltonian $H' = \frac{p^2}{2m} - e\varepsilon x$, which is exactly the same as the one from part a).

5. We start with $\Psi_E(x, 0)$

$$\begin{aligned} \Psi_E(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi e\varepsilon}} \frac{1}{l_{e\varepsilon}} \text{Ai}\left(-\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi e\varepsilon}} \frac{1}{l_{e\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\nu \cos\left[\frac{\nu^3}{3} - \nu\left(\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \frac{1}{\pi l_{e\varepsilon}} \int_0^\infty d\nu \frac{1}{2} \left[e^{i\left[\frac{\nu^3}{3} - \nu\left(\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)\right]} + e^{-i\left[\frac{\nu^3}{3} - \nu\left(\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)\right]} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \frac{1}{2\pi l_{e\varepsilon}} \int_{-\infty}^\infty d\nu e^{i\left[\frac{\nu^3}{3} - \frac{\nu E}{e\varepsilon l_{e\varepsilon}}\right]} e^{-\frac{i\nu x}{l_{e\varepsilon}}}. \end{aligned}$$

We now substitute $p = \frac{\hbar\nu}{l_{e\varepsilon}}$ which leads to

$$\begin{aligned} \Psi_E(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^\infty dp e^{i\left[\frac{(l_{e\varepsilon}p)^3}{3\hbar^3} - \frac{pE}{\hbar e\varepsilon}\right]} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-\frac{ip}{\hbar e\varepsilon}\left[\frac{p^2}{6m} - E\right]} e^{\frac{i}{\hbar}px} \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} e^{-\frac{ip}{\hbar e\varepsilon}\left[\frac{p^2}{6m} - E\right]} \Psi'_p(x, 0) \end{aligned}$$