

# Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 3

Abgabe: 14.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 18.11.2025

## Aufgabe 1: (\*) Harmonischer Oszillator (3 + 2 = 5 Punkte)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit der Störung

$$V(t) = -f(t)x.$$

a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) = \lambda\sqrt{2\hbar m\omega^3}\Theta(t)\Theta(\tau - t),$$

mit  $\tau > 0$ . Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit  $P_{0 \rightarrow 1}$ , dass ein System im Grundzustand zur Zeit  $t < 0$  nach der Zeit  $t > \tau$  im ersten angeregten Zustand zu finden ist. Wie lautet die Abhängigkeit von  $\tau$  im Grenzfall  $\omega\tau \ll 1$ ?

b) Betrachten Sie nun eine gaußförmige Störung mit

$$f(t) = \lambda\sqrt{2\hbar m\omega^3} \frac{e^{-t^2/\tau^2}}{\sqrt{\pi}},$$

und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P_{0 \rightarrow 1}$  für  $t \rightarrow \infty$ , wobei angenommen wird, dass der Oszillator sich für  $t \rightarrow -\infty$  im Grundzustand befindet. Zeigen Sie, dass im Grenzfall  $\omega\tau \ll 1$  sich die gleiche Wahrscheinlichkeit wie in der vorherigen Teilaufgabe ergibt. Bestimmen Sie  $P_{0 \rightarrow 1}$  für  $\omega\tau \gg 1$ .

## Aufgabe 2: (\*) Fermis Goldene Regel (5 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem eindimensionalen Potential, beschrieben durch

$$V(x) = -V_0\Theta(d/2 - |x|),$$

wobei  $V_0 > 0$ . Der Potentialtopf sei so tief, dass die Grundzustandsenergie des Teilchens sehr klein ist im Vergleich zu der Energie, die es benötigen würde um den Potentialtopf zu verlassen:  $\hbar^2\pi^2/(2md^2) \ll V_0$ .

Betrachten Sie nun eine zeitabhängige Störung  $H' = V\delta(x)\cos(\omega t)$  zu dem oben beschriebenen Potential. Bestimmen Sie die Übergangrate vom Grundzustand in das Kontinuum aufgrund von  $H'$  in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie. Benutzen Sie dafür Fermis Goldene Regel.

*Hinweis:* Die Wellenfunktion für das Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf ist gegeben durch

$$|\phi_0(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right),$$

für  $|x| \leq d/2$ , was dem Anfangszustand entspricht. Im Kontinuum, dem Endzustand, gilt für die Wellenfunktion des Teilchens

$$|\psi_f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx),$$

wobei  $L$  eine Länge ist, die zur Normierung der Wellenfunktion eingeführt wird.

---

### **Aufgabe 3: Kommutatorrelationen**

Überprüfen Sie die Kommutatorrelation für den Drehimpulsoperator  $\vec{L}$  und den Ortsoperator  $\vec{r}$

$$[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, \vec{r}]] = 2\hbar^2 \{\vec{L}^2, \vec{r}\}.$$

Berechnen Sie dazu die Kommutatoren  $[\vec{L}^2, x_i]$ , wobei  $x_i$  eine Komponente des Ortsoperators bezeichnet.

---