Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 3 Abgabe: 14.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 18.11.2025

Aufgabe 1: (*) Harmonischer Oszillator ($3 + 2 = 5$ Punkte)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit der Störung

$$V(t) = -f(t)x.$$

a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) = \lambda\sqrt{2\hbar m\omega^3}\Theta(t)\Theta(\tau - t),$$

mit $\tau > 0$. Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit $P_{0\to1}$, dass ein System im Grundzustand zur Zeit $t < 0$ nach der Zeit $t > \tau$ im ersten angeregten Zustand zu finden ist. Wie lautet die Abhängigkeit von τ im Grenzfall $\omega\tau \ll 1$?

Solution

The potential can be rewritten as

$$V(t) = -x\lambda\sqrt{2m\hbar\omega^3}\Theta(t)\Theta(\tau - t) = -\lambda\hbar\omega\Theta(t)\Theta(\tau - t)(a + a^\dagger),$$

then the probability $P_{0\to1}$ is given by

$$P_{0\to1} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_0}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{i(E_1-E_0)t/\hbar}\langle 1|V(t)|0\rangle\right|^2 = 4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

In the limit $\omega\tau \ll 1$ we get

$$P_{0\to1} = \lambda^2\omega^2\tau^2.$$

b) Betrachten Sie nun eine gaußförmige Störung mit

$$f(t) = \lambda\sqrt{2\hbar m\omega^3}\,\frac{\mathrm{e}^{-t^2/\tau^2}}{\sqrt{\pi}},$$

und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{0\to1}$ für $t \to \infty$, wobei angenommen wird, dass der Oszillator sich für $t \to -\infty$ im Grundzustand befindet. Zeigen Sie, dass im Grenzfall $\omega\tau \ll 1$ sich die gleiche Wahrscheinlichkeit wie in der vorherigen Teilaufgabe ergibt. Bestimmen Sie $P_{0\to1}$ für $\omega\tau \gg 1$.

Solution

Following the last part, we have

$$P_{0\to 1} = \frac{\lambda^2\omega^2}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{i\omega t - t^2/\tau^2}\right|^2 = \lambda^2\omega^2\tau^2\mathrm{e}^{-\omega^2\tau^2/2},$$

where the integral can be obtained from $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ and the variable transformation $y = (t/\tau - i\omega\tau/2)$. In the limit $\omega\tau \ll 1$ we obtain as above

$$P_{0\to 1} = \lambda^2\omega^2\tau^2,$$

and in the limit $\omega\tau \gg 1$ we get

$$P_{0\to 1} \to 0.$$

Aufgabe 2: (*) Fermis Goldene Regel (5 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem eindimensionalen Potential, beschrieben durch

$$V(x) = -V_0\Theta(d/2 - |x|)\,,$$

wobei $V_0 > 0$. Der Potentialtopf sei so tief, dass die Grundzustandsenergie des Teilchens sehr klein ist im Vergleich zu der Energie, die es benötigen würde um den Potentialtopf zu verlassen: $\hbar^2\pi^2/(2md^2) \ll V_0$.

Betrachten Sie nun eine zeitabhängige Störung $H' = V\delta(x)\cos(\omega t)$ zu dem oben beschriebenen Potential. Bestimmen Sie die Übergangsrate vom Grundzustand in das Kontinuum aufgrund von H' in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie. Benutzen Sie dafür Fermis Goldene Regel.

Hinweis: Die Wellenfunktion für das Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf ist gegeben durch

$$|\phi_0(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{d}}\cos\left(\frac{\pi x}{d}\right)\,,$$

für $|x| \leq d/2$, was dem Anfangszustand entspricht. Im Kontinuum, dem Endzustand, gilt für die Wellenfunktion des Teilchens

$$|\psi_f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}\exp\left(ikx\right),$$

wobei L eine Länge ist, die zur Normierung der Wellenfunktion eingeführt wird.

Solution

Considering that the potential box is deep enough that the lowest lying states sees the walls as infinitely high, the ground state is defined as:

$$|\phi_0(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{for} |x| \leq d/2, \quad \epsilon_0 = -V_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2}.$$

A delocalized state ($E > 0$) is characterized on the other hand by the continuous quantum number k, and is defined as:

$$|\psi_f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}, \quad \epsilon_f(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

The transition rate between two such states is given by, according to Fermi's golden rule

$$\Gamma_{0,k} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4} \left|\langle \psi_f(x)| V\delta(x) |\phi_0(x)\rangle\right|^2 \left[\delta(\epsilon_f(k) - \epsilon_0 - \hbar\omega) + \delta(\epsilon_f(k) - \epsilon_0 + \hbar\omega)\right],$$

with the δ-functions imposing energy conservation via an absorption (first one) or emission process (second one). The scalar product, on the other hand, keeps into account the strength of the potential channel connecting the initial and end states.
As in our problem the initial state has less energy than the final one, only absorption processes will be relevant. Solving the equation the equation $\epsilon_f(k) - \epsilon_0 - \hbar\omega = 0$ for k leads to

$$\bar{k}_\pm = \pm \bar{k} = \pm \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{\pi^2}{d^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2}}.$$

The total transition rates is given by the integral of $\Gamma_{0,k}$ over all possible final states. Using the identity of the dirac delta distribution

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{f(x - x_i)}{|f'(x_i)|},$$

where x_i are the zeros of $f(x)$, we get

$$\Gamma_0 = \int \frac{L}{2\pi} \mathrm{d}k\, \Gamma_{0,k} = \frac{V^2}{\hbar^3 d} \frac{m}{|\bar{k}|},$$

where in the first line the $\int \frac{L}{2\pi} \mathrm{d}k$ is the dimensionless integration measure to sum the final states.

Aufgabe 3: Kommutatorrelationen

Überprüfen Sie die Kommutatorrelation für den Drehimpulsoperator $\vec{L}$ und den Ortsoperator $\vec{r}$

$$[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, \vec{r}]] = 2\hbar^2 \{\vec{L}^2, \vec{r}\}.$$

Berechnen Sie dazu die Kommutatoren $[\vec{L}^2, x_i]$, wobei x_i eine Komponente des Ortsoperators bezeichnet.

Solution

We start with the commutation relation

$$[L_m, x_i] = \epsilon_{mjk} x_j [p_k, x_i] = -i\hbar \epsilon_{mji} x_j = i\hbar \epsilon_{mij} x_j \,,$$

and we have

$$[\vec{L}^2, x_i] = i\hbar \epsilon_{mij} \{L_m, x_j\} \,,$$

where $\{a, b\} = ab + ba$ is the anti-commutator. We can use $[L_a, L_b] = i\hbar \epsilon_{abc} L_c$ to evaluate

$$[L_n, \{L_m, x_j\}] = i\hbar \Big(\epsilon_{njk} \{L_m, x_k\} + \epsilon_{nmk} \{L_k, x_j\} \Big) \,.$$

Then we can have

$$\begin{aligned} \Big[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, x_i]\Big] =& -\hbar^2 \Big(L_i \{L_k, x_k\} - L_n \{L_n, x_i\} + L_n \{L_i, x_n\} - L_i \{L_k, x_k\} \\ & + \{L_k, x_k\} L_i - \{L_n, x_i\} L_n + \{L_i, x_n\} L_n - \{L_k, x_k\} L_i \Big) \,, \end{aligned}$$

by using

$$\begin{aligned} \epsilon_{mij} \epsilon_{njk} &= \epsilon_{jmi} \epsilon_{jkn} = \delta_{mk} \delta_{in} - \delta_{mn} \delta_{ik} \,, \\ \epsilon_{mij} \epsilon_{nmk} &= \epsilon_{mij} \epsilon_{mkn} = \delta_{ik} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jk} \,. \end{aligned}$$

Solution

Now we can further use the followings

$$\begin{aligned} L_m x_m &= \epsilon_{mjk} x_m x_j p_k = 0 \,, \\ L_m x_i L_m &= [L_m, x_i] L_m + x_i L_m^2 = L_m [x_i, L_m] + L_m^2 x_i \\ [L_i, x_m] &= i\hbar \epsilon_{imj} x_j = -i\hbar \epsilon_{mij} x_j = [x_i, L_m] \,, \end{aligned}$$

to obtain the final relation

$$\Big[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, x_i]\Big] = 2\hbar^2 \{L_n^2, x_i\}$$