

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 4

Abgabe: 21.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 25.11.2025

Aufgabe 1: (*) Wasserstoffatom im elektrischen Feld (4 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}(t)$, das entlang der z -Richtung liegt. Die Amplitude betrage $E(t) = A\tau/(\tau^2 + t^2)$, wobei A und τ vorgegebene Konstanten sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P für den Übergang des Elektrons aus dem Grundzustand (bei $t \rightarrow -\infty$) in den $2P$ -Zustand (bei $t \rightarrow +\infty$).

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}.$$

Aufgabe 2: (*) Lebensdauer für Dipolübergang (2 + 3 + 1 = 6 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, wobei sich das Elektron in einem $2P$ -Zustand mit $m = 0, +1$ oder -1 befindet. Mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung erhält man für die Übergangsrate in den $1S$ -Zustand (in SI-Einheiten)

$$\frac{d\Gamma_{2P \rightarrow 1S, \vec{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2P,1S} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}^*|^2,$$

wobei \vec{k} und λ Wellenzahl und Polarisation des Photons sind und sich ω aus der Energiedifferenz zwischen dem $2P$ - und $1S$ -Niveau ergibt.

- Summieren Sie über beide Polarisationszustände und integrieren Sie über den Raumwinkel $d\Omega$ (des Vektors \vec{k}), um die Lebensdauer in Abhängigkeit vom Betrag des Dipolmatrixelements $|\vec{d}_{2P,1S}|$ zu bekommen.
 - Berechnen Sie das Dipolmatrixelement $\vec{d}_{2P,1S}$ und drücken Sie die Lebensdauer τ durch α , m_e , c und \hbar aus.
 - Werten Sie τ numerisch aus. Numerische Werte für die Konstanten finden Sie auf der Webseite https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/contents_sports.html.
-

Aufgabe 3: Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes

Der Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes in einem endlichen Volumen V ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int d^3 r \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \\ &= \frac{V \epsilon_0 c^2}{2} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{c^2} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

wobei $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$ aus Gl. (2) (siehe unten) extrahiert werden kann. Zeigen Sie, dass Gl. (1) in folgender Form geschrieben werden kann

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar c k \left(\vec{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \vec{a}_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right),$$

wobei \vec{k} den Wellenvektor und λ die Polarization bezeichnet. Das Vektorpotential ist dabei gegeben durch (mit $\omega_k = kc$)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left(a_{\vec{k}, \lambda} \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right), \quad (2)$$

wobei $a_{\vec{k}, \lambda}$ und $a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind. Es gilt

$$[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}] = 0, \quad \text{und} \quad [a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger] = 0.$$

Hinweis: O.B.d.A. kann man Polarisationsvektoren wählen, so dass gilt $\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} = \vec{\epsilon}_{-\vec{k}, \lambda}$.
