

# Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 4

Abgabe: 21.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 25.11.2025

## Aufgabe 1: (\*) Wasserstoffatom im elektrischen Feld (4 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem homogenen elektrischen Feld  $\vec{E}(t)$ , das entlang der  $z$ -Richtung liegt. Die Amplitude betrage  $E(t) = A\tau/(\tau^2 + t^2)$ , wobei  $A$  und  $\tau$  vorgegebene Konstanten sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P$  für den Übergang des Elektrons aus dem Grundzustand (bei  $t \rightarrow -\infty$ ) in den  $2P$ -Zustand (bei  $t \rightarrow +\infty$ ).

*Hinweis:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}.$$

Solution

The electric field in the  $z$ -direction implies the Hamiltonian

$$H = H_0 + V(t) = H_0 + qE(t)z,$$

where  $q$  is the charge of the electron. By using first-order perturbation theory, we have

$$\begin{aligned} A_{|m\rangle \rightarrow |n\rangle}(t) &= \delta_{mn} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i(E_n - E_m)t'/\hbar} \langle n|V(t')|m\rangle \\ &= 0_{|m \neq n} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega_{nm}t'} \frac{A\tau q}{\tau^2 + t'^2} \langle n|z|m\rangle, \\ &= \frac{Aq\pi}{i\hbar} e^{-|\omega_{nm}|\tau} \langle n|z|m\rangle \end{aligned}$$

where we use the integration formula in the hint and with  $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$ . With  $|m\rangle = |1s\rangle$  and  $|n\rangle = |2p\rangle$ , we have the probability

$$P_{1s \rightarrow 2p} = |A(t)|^2 = \frac{A^2 q^2 \pi^2}{\hbar^2} e^{-2|\omega|\tau} |\langle 2p|z|1s\rangle|^2,$$

where  $|\omega|_{1s \rightarrow 2p} = \left| \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \right| = \frac{3}{4} \frac{E_1}{\hbar}$ .

Solution

Then we use the following wave functions for the states

$$|1s\rangle : \psi_{100}(\vec{r}) = R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$|2p, l=1\rangle : \psi_{21m}(\vec{r}) = R_{21}(r)Y_{1m}(\theta, \phi),$$

where  $m = -1, 0, 1$  and Bohr radius  $a_0$ . Here we only need  $\psi_{210}(\vec{r})$  since  $Y_{1,\pm 1}(0, \phi) \propto e^{\pm i\phi}$  and  $\int_0^{2\pi} d\phi e^{\pm i\phi} = 0$ , then we have

$$\psi_{210} = R_{21}(r)Y_{10}(0, \phi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta.$$

Using spherical coordinates,  $z = r \cos \theta$ , we have

$$\begin{aligned} \langle 2p|\vec{z}|1s\rangle &= \frac{1}{4\pi} \frac{a_0}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{a_0^4} \int_0^\infty r^3 dr \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-3/2(r/a_0)} \right] \int_{-1}^1 \cos^2 \theta d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \frac{2^8}{3^5}, \end{aligned}$$

and the probability

$$P_{1s \rightarrow 2p} = \frac{A^2 \pi^2}{\hbar^2} e^{-2\omega\tau} a_0^2 \frac{2^{15}}{3^{10}} \simeq 0.55 \frac{A^2 \pi^2}{\hbar^2} e^{-2\omega\tau} a_0^2.$$

### Aufgabe 2: (\*) Lebensdauer für Dipolübergang (2 + 3 + 1 = 6 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, wobei sich das Elektron in einem  $2P$ -Zustand mit  $m = 0, +1$  oder  $-1$  befindet. Mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung erhält man für die Übergangsrates in den  $1S$ -Zustand (in SI-Einheiten)

$$\frac{d\Gamma_{2P \rightarrow 1S, \vec{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2P,1S} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}^*|^2,$$

wobei  $\vec{k}$  und  $\lambda$  Wellenzahl und Polarisation des Photons sind und sich  $\omega$  aus der Energiedifferenz zwischen dem  $2P$ - und  $1S$ -Niveau ergibt.

- a) Summieren Sie über beide Polarisationszustände und integrieren Sie über den Raumwinkel  $d\Omega$  (des Vektors  $\vec{k}$ ), um die Lebensdauer in Abhängigkeit vom Betrag des Dipolmatrixelements  $|\vec{d}_{2P,1S}|$  zu bekommen.

Solution

We have

$$\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \sum_{\lambda} \int d\Omega \frac{d\Gamma_{2p \rightarrow 1s, \vec{k}\lambda}}{d\Omega}, \quad \lambda = 1, 2.$$

Now parametrise the angle with

$$\vec{d}_{2p,1s} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k},1}^* = \cos \theta_1 |\vec{d}_{1p,1s}|, \quad \vec{d}_{2p,1s} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k},2}^* = \cos \theta_2 |\vec{d}_{2p,1s}|,$$

then we have

$$\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \int d\Omega \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2).$$

Next rewrite the  $\cos \theta_i$  in spherical coordinates as

$$\cos \theta_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad \cos \theta_2 = \sin \theta \sin \phi,$$

which corresponds to choosing the coordinate system such that the two polarization vectors span the  $x - y$  plane. Finally we have

$$\int d\Omega (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2) = \int_{-1}^1 d \cos \theta \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \frac{8\pi}{3}.$$

Hence we have

$$\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \frac{4\alpha}{3c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2,$$

and the lifetime is

$$\tau = 1/\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \left( \frac{4\alpha}{3c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \right)^{-1}$$

- b) Berechnen Sie das Dipolmatrixelement  $\vec{d}_{2P,1S}$  und drücken Sie die Lebensdauer  $\tau$  durch  $\alpha$ ,  $m_e$ ,  $c$  und  $\hbar$  aus.

Solution

$$\vec{d}_{2p \rightarrow 1s} = \langle 1s | \vec{R} | 2p \rangle = \int r^2 dr \int d\Omega \psi_{1s}^*(\vec{r}) \psi_{2p}(\vec{r}) \vec{r}.$$

We use

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \phi), \quad \psi_{2s}(\vec{r}) = R_{21}(r)Y_{1m}(\theta, \phi), \quad \vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

and

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi},$$

then we have

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \phi &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,-1} - Y_{11}), \\ \sin \theta \sin \phi &= -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,-1} + Y_{11}), \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}. \end{aligned}$$

Hence we have

$$R_{10} = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}}, \quad R_{21} = \frac{1}{(24a_0^3)^{1/2}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}},$$

yielding

$$\begin{aligned} \vec{d}_{2p,1s} &= \int_0^\infty dr r^4 \frac{1}{a_0^4 \sqrt{6}} e^{-\frac{3r}{2a_0}} \int d\Omega \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Y_{1m} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,-1} - Y_{11}) \\ -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,-1} + Y_{11}) \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_0^4 \sqrt{6}} \frac{256a_0^5}{81} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}) \\ -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \delta_{m,0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} |\vec{d}_{2p,1s}|^2 &= \frac{a_0^2}{6} \left( \frac{256}{81} \right)^2 \left[ \frac{1}{6} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) + \frac{1}{6} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) + \frac{1}{3} \delta_{m,0} \right] \\ &= \frac{a_0^2 2^{15}}{3^{10}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1} + \delta_{m,0}). \end{aligned}$$

Solution

Now with  $\omega = \frac{E_{2p} - E_{1s}}{\hbar} = \frac{\alpha^2 mc^2}{\hbar} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha^2 mc^2}{\hbar} \frac{3}{8}$  and  $a_0 = \frac{\hbar}{\alpha mc}$ , we can compute the life time

$$\begin{aligned}\tau &= \left( \frac{4\alpha}{3c^2} \omega^3 \alpha_0^2 \frac{2^{15}}{3^{10}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1} + \delta_{m,0}) \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{\alpha^7 m^3 c^4 a_0^2 2^8}{\hbar^3} \underbrace{(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1} + \delta_{m,0})}_{:=1 \text{ for } m=-1,0,1} \right)^{-1} \\ &= \frac{\hbar}{\alpha^5 mc^2} \frac{3^8}{2^8}\end{aligned}$$

- c) Werten Sie  $\tau$  numerisch aus. Numerische Werte für die Konstanten finden Sie auf der Webseite [https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/contents\\_sports.html](https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/contents_sports.html).

Solution

$$\tau = 1.595 \times 10^{-9} \text{s}$$

### Aufgabe 3: Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes

Der Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes in einem endlichen Volumen  $V$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int d^3 r \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \\ &= \frac{V \epsilon_0 c^2}{2} \sum_{\vec{k}} \left( \frac{1}{c^2} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

wobei  $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$  aus Gl. (2) (siehe unten) extrahiert werden kann. Zeigen Sie, dass Gl. (1) in folgender Form geschrieben werden kann

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar c k \left( \vec{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \vec{a}_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right),$$

wobei  $\vec{k}$  den Wellenvektor und  $\lambda$  die Polarization bezeichnet. Das Vektorpotential ist dabei gegeben durch (mit  $\omega_k = kc$ )

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left( a_{\vec{k}, \lambda} \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right), \quad (2)$$

wobei  $a_{\vec{k}, \lambda}$  und  $a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger$  die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind. Es gilt

$$[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}] = 0, \quad \text{und} \quad [a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger] = 0.$$

*Hinweis:* O.B.d.A. kann man Polarisationsvektoren wählen, so dass gilt  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} = \vec{\epsilon}_{-\vec{k}, \lambda}$ .

Solution

It is enough to consider the following the form of the vector potential  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  with

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left( a_{\vec{k},\lambda} \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}^* e^{i\omega_k t} \right),$$

which holds only in the integral. We can employ the properties of polarisation vectors ( $\lambda = 1, 2$ )

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0, \quad \vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \quad |\vec{\epsilon}_i| = 1, \quad \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\epsilon}_1 = \vec{\epsilon}_2, \quad \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\epsilon}_2 = -\vec{\epsilon}_1,$$

and obtain the followings

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) &= \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left( a_{\vec{k},\lambda} \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} (-i\omega_k) e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}^* (i\omega_k) e^{i\omega_k t} \right) \\ \vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left[ \left( a_{\vec{k},1} |\vec{k}| \vec{\epsilon}_{\vec{k},2} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k},1}^{\dagger} |\vec{k}| \vec{\epsilon}_{\vec{k},2}^* e^{i\omega_k t} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( a_{\vec{k},2} |\vec{k}| \vec{\epsilon}_{\vec{k},1} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k},2}^{\dagger} |\vec{k}| \vec{\epsilon}_{\vec{k},1}^* e^{i\omega_k t} \right) \right]. \end{aligned}$$

With  $\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0$  and  $|\vec{\epsilon}_i| = 1$ , we further have

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}|^2 &= \sum_{\lambda} \frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0} \left[ \omega_k^2 \left( a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} \right) + a_{\vec{k},\lambda}^2 (-\omega_k^2) e^{-2i\omega_k t} + \left( a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \right)^2 (-\omega_k^2) e^{2i\omega_k t} \right] \\ |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}|^2 &= \sum_{\lambda} \frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0} \left[ k^2 \left( a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} \right) + a_{\vec{k},\lambda}^2 k^2 e^{-2i\omega_k t} + \left( a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \right)^2 k^2 e^{2i\omega_k t} \right]. \end{aligned}$$

Now use  $\omega_k^2 = c^2 k^2$  and  $[a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}$  and arrive at

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 &= 2 \sum_{\lambda} \frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0} k^2 \left( a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} \right) \\ &= \frac{2\hbar}{cV\epsilon_0} \sum_{\lambda} k \left( a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

and finally

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \frac{V\epsilon_0 c^2}{2} \frac{2\hbar}{cV\epsilon_0} \sum_{\vec{k},\lambda} k \left( a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} k \left( a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$