Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 5 Abgabe: 28.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 02.12.2025

Aufgabe 1: Eichinvarianz

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines geladenen Teilchens im Magnetfeld. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned} \vec{A} \to \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \,, \\ \Phi \to \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda \,, \\ \Psi \to \Psi' &= e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\,\Psi \,, \end{aligned}$$

wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. $\vec{A}$, Φ und Λ sind Funktionen von $\vec{r}$ und t. Q bezeichnet die elektrische Ladung des Teilchens.

Aufgabe 2: (*) Relativistische Kinematik (4 Punkte)

a) Ein Teilchen mit Masse m und Enerige E bewegt sich entlang der x-Achse und kollidiert mit einem identischen Teilchen in Ruhe, so dass sich nach der Kollision beide Teilchen mit dem Streuungswinkel θ zur x-Achse bewegen. Berechnen Sie den Streuungswinkel $\cos\theta$ in Abhängigkeit von E und m. Betrachten Sie den Winkel $\cos\theta$ im relativistischen ($E \gg mc^2$) und nicht relativistischen ($(E - mc^2) \ll mc^2$) Limit und berechnen Sie jeweils die ersten beiden führenden Terme.

b) Ein Photon mit Wellenlänge λ und Energie $E = hc/\lambda$ bewegt sich entlang der x-Achse und kollidiert mit einem ruhendem Elektron. Zeigen Sie, dass die Wellenlänge λ' des Photons nach der Kollision geben ist durch

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

wobei θ der Streuungswinkel zwischen dem gestreuten Photon und der x-Achse ist. Zeigen Sie, dass für $\theta \approx \pi$ und $E \gg m_e c^2$ in führender Ordnung λ' unabhängig von λ ist.

Aufgabe 3: Levi-Civita-Tensor und Lorentz-Transformation

a) Zeigen Sie, dass der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor ein Pseudotensor vierter Stufe unter Lorentz-Transformation ist, *d.h.* dass gilt

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda)\,\Lambda^{\alpha}_{\ \alpha'}\,\Lambda^{\beta}_{\ \beta'}\,\Lambda^{\gamma}_{\ \gamma'}\,\Lambda^{\delta}_{\ \delta'}\;\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Ausdruck in der Mitte die Definition des Levi-Civita-Tensors erfüllt.

b) Zeigen Sie nun, dass $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$, wobei $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta$ Vierervektoren sind, ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen ist.

Aufgabe 4: (*) Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld

($1+1+1+2+1 = 6$ Punkte)

a) Leiten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld her. Benutzen Sie dazu die relativistische Energie-Impuls Beziehung und verwenden Sie das Korrespondenzprinzip mit minimlar Kopplung.

b) Zeigen Sie, dass Ψ^* ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt, wobei Ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus dem Aufgabenteil (a) ist.

c) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(\vec{r},t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$(-\hbar^2c^2\triangle + m^2c^4)u(\vec{r}) = [E - e\Phi(r)]^2u(\vec{r})\,.$$

d) Vergleichen Sie das daraus folgende Eigenwertproblem mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2+[(l+1/2)^2-(Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen, die in der Lösung der Klein-Gordon-Gleichung auftauschen. Der Vergleich liefert die Relationen zu den Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.

e) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.
