Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 5 Abgabe: 28.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 02.12.2025

Aufgabe 1: Eichinvarianz

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines geladenen Teilchens im Magnetfeld. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned} \vec{A} \to \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda\,, \\ \Phi \to \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda\,, \\ \Psi \to \Psi' &= e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\,\Psi\,, \end{aligned}$$

wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. $\vec{A}$, Φ und Λ sind Funktionen von $\vec{r}$ und t. Q bezeichnet die elektrische Ladung des Teilchens.

Solution

The Schrödinger equation for the transformed fields is given by

$$\begin{aligned} 0 &= i\hbar\partial_t\Psi' - \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A}'\right)^2 + Q\Phi'\right]\Psi' \\ &= e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\left\{i\hbar\partial_t\Psi - \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A}\right)^2 + Q\Phi\right]\Psi\right\}, \end{aligned}$$

which directly shows the invariance, where we used

$$\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A}'\right)\Psi' = e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A}\right)\Psi,$$

and

$$\left(i\hbar\partial_t - Q\Phi'\right)\Psi' = e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\left(i\hbar\partial_t - Q\Phi\right)\Psi.$$

Aufgabe 2: (*) Relativistische Kinematik (4 Punkte)

a) Ein Teilchen mit Masse m und Enerigе E bewegt sich entlang der x-Achse und kollidiert mit einem identischen Teilchen in Ruhe, so dass sich nach der Kollision beide Teilchen mit dem Streuungswinkel θ zur x-Achse bewegen. Berechnen Sie den Streuungswinkel $\cos\theta$ in Abhängigkeit von E und m. Betrachten Sie den Winkel $\cos\theta$ im relativistischen ($E \gg mc^2$) und nicht relativistischen ($(E - mc^2) \ll mc^2$) Limit und berechnen Sie jeweils die ersten beiden führenden Terme.

Solution

The four momenta can be written as

$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ |\vec{p}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} mc^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1' = \begin{pmatrix} E' \\ |\vec{p}\,'|\cos\theta \\ |\vec{p}\,'|\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2' = \begin{pmatrix} E' \\ |\vec{p}\,'|\cos\theta \\ -|\vec{p}\,'|\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

where $\vec{p}$ is the three-momentum of the moving particle before the collision and $|\vec{p}\,'|$ is the absolute value of the three-momentum of both particles after the collision. From energy and momentum conservation (along the x axis), we have the following relations

$$E + mc^2 = 2E' \qquad \text{and} \qquad |\vec{p}| = 2|\vec{p}\,'|\cos\theta.$$

In addition, we have the on-shell relations of both particles

$$m^2c^4 = E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2 = E'^2 - \vec{p}\,'^2c^2.$$

Now we can use the first two equations to solve for $\cos\theta$ which leads to

$$\cos\theta = \frac{|\vec{p}|}{2\vec{p}\,'} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{2\sqrt{E'^2 - m^2c^4}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{E + 3mc^2}}.$$

In the relativistic limit ($mc^2/E \ll 1$), the results reads

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + mc^2/E}{1 + 3mc^2/E}} = 1 - mc^2/E + \mathcal{O}((mc^2/E)^2).$$

On the other hand, in the non-relativistic limit ($(E - mc^2)/(mc^2) \ll 1$, we get

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{2 + (E - mc^2)/(mc^2)}{4 + (E - mc^2)/(mc^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{E - mc^2}{mc^2} + \mathcal{O}(((E - mc^2)/(mc^2))^2).$$

The first term corresponds to the result that can be obtained in classical mechanics.

b) Ein Photon mit Wellenlänge λ und Energie $E = hc/\lambda$ bewegt sich entlang der x-Achse und kollidiert mit einem ruhendem Elektron. Zeigen Sie, dass die Wellenlänge λ' des Photons nach der Kollision geben ist durch

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

wobei θ der Streuungswinkel zwischen dem gestreuten Photon und der x-Achse ist. Zeigen Sie, dass für $\theta \approx \pi$ und $E \gg m_e c^2$ in führender Ordnung λ' unabhängig von λ ist.

Solution

In this case we can write the four momenta as

$$p_\gamma = \begin{pmatrix} E \\ (E/c) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} m_e c^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p'_\gamma = \begin{pmatrix} E' \\ (E'/c)\cos\theta \\ (E'/c)\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p'_2 = \begin{pmatrix} E'_e \\ (E/c) - (E'/c)\cos\theta \\ -(E'/c)\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

From energy conservation directly follows

$$E + m_e c^2 = E' + E'_e$$

and the on-shell condition of the electron can be written as

$$\begin{aligned} E_e'^2 &= E'^2 \sin^2\theta + (E - E'\cos^2\theta)^2 + m_e^2 c^4 \\ &= E'^2 + E^2 + m_e^2 c^4 - 2EE'\cos\theta \\ &= E'^2 + E^2 + m_e^2 c^4 + 2E m_e c^2 - 2E'(E + m_e c^2) \end{aligned}$$

where the last equality follows from inserting the the energy conservation relations for E_e. Now can solve for E'

$$E' = \frac{m_e c^2 E}{E(1-\cos\theta) + m_e c^2}.$$

Thus, the wavelength of the photon after the collision is given by

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta).$$

Considering the limit $\theta \approx \pi$ and afterwards $m_e c^2/E \ll 1$ leads to

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + \frac{h}{m_e c}\left(2 - \frac{(\theta-\pi)^2}{2} + \mathcal{O}((\theta-\pi)^4)\right) \\ &= \frac{hc}{E} + \frac{h}{m_e c}\left(2 - \frac{(\theta-\pi)^2}{2}\right) \\ &= \frac{h}{m_e c}\left(2 + \frac{m_e c^2}{E} - \frac{(\theta-\pi)^2}{2} + \mathcal{O}((\theta-\pi)^4\right), \end{aligned}$$

so that the first non-vanishing term is independent of $E(\lambda)$.

Aufgabe 3: Levi-Civita-Tensor und Lorentz-Transformation

a) Zeigen Sie, dass der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor ein Pseudotensor vierter Stufe unter Lorentz-Transformation ist, *d.h.* dass gilt

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda)\, \Lambda^\alpha_{\ \alpha'}\, \Lambda^\beta_{\ \beta'}\, \Lambda^\gamma_{\ \gamma'}\, \Lambda^\delta_{\ \delta'}\ \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Ausdruck in der Mitte die Definition des Levi-Civita-Tensors erfüllt.

Solution

First we use the column expansion of determinant

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0{}_{\alpha'}\,\Lambda^1{}_{\beta'}\,\Lambda^2{}_{\gamma'}\,\Lambda^3{}_{\delta'}\;\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\,,$$

and we can show that

$$\epsilon'^{\,0123} = \det(\Lambda)\,\Lambda^0{}_{\alpha'}\,\Lambda^1{}_{\beta'}\,\Lambda^2{}_{\gamma'}\,\Lambda^3{}_{\delta'}\;\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \det(\Lambda)^2 = (\pm1)^2 = 1\,.$$

Second we show that by permuting two indices, we have

$$\begin{aligned}
\epsilon'^{\alpha\beta\delta\gamma} &= \det(\Lambda)\,\Lambda^\alpha_{\ \alpha'}\,\Lambda^\beta_{\ \beta'}\,\Lambda^\delta_{\ \gamma'}\,\Lambda^\gamma_{\ \delta'}\;\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\\
&= \det(\Lambda)\,\Lambda^\alpha_{\ \alpha'}\,\Lambda^\beta_{\ \beta'}\,\Lambda^\gamma_{\ \delta'}\,\Lambda^\delta_{\ \gamma'}\,(-1)\,\epsilon^{\alpha'\beta'\delta'\gamma'}\\
&= -\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta}\,,
\end{aligned}$$

where the (-1) factor comes from the interchange of two columns.
Alternatively, we have

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda)\,\Lambda^\alpha_{\ \alpha'}\,\Lambda^\beta_{\ \beta'}\,\Lambda^\gamma_{\ \gamma'}\,\Lambda^\delta_{\ \delta'}\;\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = (\det(\Lambda))^2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,,$$

which also follows directly from the definition of the determinant.

b) Zeigen Sie nun, dass $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$, wobei $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta$ Vierervektoren sind, ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen ist.

Solution

Here we define $X := \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$, and we have have

$$\begin{aligned}
X' &= \epsilon'^{\,\alpha\beta\gamma\delta}\,a'_\alpha\,b'_\beta\,c'_\gamma\,d'_\delta\\
&= \det(\Lambda)\,\Lambda^\alpha_{\ \alpha'}\,\Lambda^\beta_{\ \beta'}\,\Lambda^\gamma_{\ \gamma'}\,\Lambda^\delta_{\ \delta'}\;\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\;\Lambda_\alpha^{\ \mu}\,\Lambda_\beta^{\ \nu}\,\Lambda_\gamma^{\ \rho}\,\Lambda_\delta^{\ \sigma}\,a_\mu\,b_\nu\,c_\rho\,d_\sigma\\
&= \det(\Lambda)\,g^\mu_{\ \alpha'}\,g^\nu_{\ \beta'}\,g^\rho_{\ \gamma'}\,g^\sigma_{\ \delta'}\,\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\;a_\mu\,b_\nu\,c_\rho\,d_\sigma\\
&= \det(\Lambda)\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\;a_\mu\,b_\nu\,c_\rho\,d_\sigma\\
&= \det(\Lambda)X\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Hence X is a pseudoscalar under Lorentz transformation. Note that $\det(\Lambda) = \pm1$ for the proper or improper Lorentz transformation.

Aufgabe 4: (*) Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld

$(1+1+1+2+1 = 6$ Punkte)

a) Leiten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld her. Benutzen Sie dazu die relativistische Energie-Impuls Beziehung und verwenden Sie das Korrespondenzprinzip mit minimlar Kopplung.

Solution

The relativistic energy-momentum relative is given by

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2.$$

Considering the correspondence principle with minimal coupling, we have to perform the following replacements

$$\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}, \quad E \to i\hbar\partial_t - q\phi,$$

which then leads to the Klein-Gordon equation

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2\,\Psi = \left[m^2c^4 + \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 c^2\right]\Psi.$$

b) Zeigen Sie, dass Ψ^* ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt, wobei Ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus dem Aufgabenteil (a) ist.

Solution

We get the equation for Ψ^* by complex conjugation, where in this case only some signs will change:

$$\left[(i\hbar\partial_t - q\phi)^2\right]^*\Psi^* = m^2c^4\Psi^* + \left[\left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 c^2\right]^*\Psi^*$$
$$(-i\hbar\partial_t - q\phi)^2\,\Psi^* = m^2c^4\Psi^* + \left(i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 c^2\Psi^*.$$

Now we can replace $q' = -q$ and obtain the following equation

$$\left(i\hbar\partial_t - q'\phi\right)^2\Psi^* = m^2c^4\Psi^* + \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q'\vec{A}\right)^2 c^2\Psi^*,$$

which again is the Klein-Gordon equation with q' instead of q.

c) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(\vec{r},t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$(-\hbar^2c^2\triangle + m^2c^4)u(\vec{r}) = [E - e\Phi(r)]^2u(\vec{r})\,.$$

Solution

For a Coulombpotential we have $\vec{A} = 0$ and we get the following equation by using the Ansatz

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2\,u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar} = m^2c^4u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar} + \left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2 c^2u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}.$$

After taking the time derivative the differential equation for $u(\vec{r})$ is given by:

$$\left(E^2 + q^2\phi^2 - 2q\phi E\right)u(\vec{r}) = \left(m^2c^4 - c^2\hbar^2\vec{\nabla}^2\right)u(\vec{r}).$$

d) Vergleichen Sie das daraus folgende Eigenwertproblem mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2+[(l+1/2)^2-(Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen, die in der Lösung der Klein-Gordon-Gleichung auftauschen. Der Vergleich liefert die Relationen zu den Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.

Solution

We follow closely the solution of the classical hydrogen atom. Since we have radial symmetric problem we can use the following Ansatz:

$$u(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\Theta, \varphi),$$

and get the following equation for the radial part R_{nl}:

$$\frac{1}{c^2}\left(\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)^2 - m^2c^4\right) R_{nl}(r) = \hbar^2 \left(-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R_{nl}(r) \quad (2)$$

The differential equation for the non-relativistic hydrogen atom is given by

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{l'(l'+1)}{r^2}\right) R'_{n'l'}(r) = \left(E' + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) R'_{n'l'}(r).$$

Next, we rewrite Eq. (2) to obtain the same form as in the non-relativistic case:

$$\left(\frac{E^2 - m^2c^4}{2E} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) R_{nl}(r) = \frac{\hbar^2 c^2}{2E}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{l(l+1) - Z^2\alpha^2}{r^2}\right) R_{nl}(r)$$

By comparison of both equations, we get the following relations:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{E^2 - m^2c^4}{2E} \\ \mu &= \frac{E}{c^2} \\ l' &= \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

For the non-relativistice hydrogen atom, we have the following solution for E':

$$E' = -\frac{Z^2\alpha^2\mu c^2}{2n'^2},$$

where n' is the principal quantum number of the non-relativistic hydrogen atom. Now solving for E leads to

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n'^2}}}.$$

Solution

For the non-relativistic hydrogen atom we have the relation $n' = n_r + l'$ with the radial quantum number n_r. This leads to

$$\begin{aligned}
E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{(n_r + l')^2}}} \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2} - \frac{1}{2}\right)^2}}} \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n - l + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2} - \frac{1}{2}\right)^2}}}
\end{aligned}$$

e) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.

Solution

Calculating the Taylor Series in $Z\alpha$ leads to

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2} - \frac{1}{2}\right)^2}}} \\
&= mc^2 - \frac{mc^2}{2(n_r + l)^2}(Z\alpha)^2 - \frac{mc^2(8n_r + 2l - 3)}{8(1 + 2l)(n_r + l)^4}(Z\alpha)^4,
\end{aligned}$$

where the first term is the energy of the electron in rest (mass), the second term corresponds to the energy levels of the non-relativistic hydrogen atom and the third term is originating from relativistic corrections.