

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 6

Abgabe: 05.12.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 09.12.2025

Aufgabe 1: (*) Eichinvarianz Dirac-Gleichung (5 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator der Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld und zeigen Sie, dass die Dirac-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned}\vec{A} \rightarrow \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \\ \Phi \rightarrow \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \\ \Psi \rightarrow \Psi' &= \Psi \exp(i e \Lambda / \hbar),\end{aligned}$$

wobei \vec{A} das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. \vec{A} , Φ und Λ sind Funktionen von \vec{r} und t . ($-e$) ist die Ladung des Elektrons.

Aufgabe 2: $Z \rightarrow \tau^+ \tau^-$

Ein ruhendes Z -Boson der Masse $M_Z = 91.1887 \text{ GeV}/c^2$ zerfällt in ein $\tau^+ \tau^-$ -Paar ($m_{\tau^\pm} = 1.7771 \text{ GeV}/c^2$).

- Berechnen Sie die Energie und den Impuls der Zerfallsprodukte (in GeV bzw. GeV/c).
- Die mittlere Lebensdauer ruhender τ -Leptonen beträgt $2.956 \cdot 10^{-13} \text{ s}$. Wie weit kommen die τ -Leptonen im Mittel?

Aufgabe 3: (*) Gamma-Matrizen (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

- Die Gamma-Matrizen genügen der Dirac-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

Sie haben in der Dirac-Darstellung folgende Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ_i , $i = 1, 2, 3$ die Pauli Matrizen bezeichnen.

Berechnen Sie die Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

in der Dirac-Darstellung.

- Zeigen Sie, dass gilt

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = -2i(g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\omega} - g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\omega} - g_{\mu\omega}\sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\omega}\sigma_{\mu\rho}).$$

c) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} \not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} &= 2A \cdot B, & \gamma^\nu \not{A} + \not{A}\gamma^\nu &= 2A^\nu, \\ \gamma^\nu \not{A}\gamma_\nu &= -2\not{A}, & \gamma^\nu \not{A}\not{B}\gamma_\nu &= 4A \cdot B, \end{aligned}$$

wobei A und B Vierervektoren sind und die Notation $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$ verwendet wurde.

Hinweis: Für Aufgabenteil (b) und (c) soll keine explizite Darstellung der Gamma-Matrizen verwendet werden.

Aufgabe 4: Rechnen mit natürlichen Einheiten

In der Teilchenphysik rechnet man in einem Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. Das bedeutet, dass Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit und Wirkungen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums dividiert durch 2π angegeben werden.

a) Welche Beziehungen folgen daraus zwischen den Einheiten Meter, Sekunde und MeV?

Hinweis: $c = 299\,792\,458$ m/s und $\hbar = 6,582\,119 \cdot 10^{-22}$ MeV s.

b) Welcher Masse in Kilogramm entspricht 1 MeV?

Hinweis: $1 \text{ eV} = 1,602\,176 \cdot 10^{-19}$ J.

c) Drücken Sie die inverse Pionenmasse ($m_\pi = 140$ MeV) in fm(= 10^{-15} m) aus.

d) Das Z -Boson hat etwa eine Breite von 2.50 GeV. Wie lange ist die Lebensdauer des Z -Bosons in Sekunden?
