

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 7

Abgabe: 12.12.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 16.12.2025

Aufgabe 1: Stromerhaltung

Ψ sei eine Lösung der Dirac-Gleichung für ein Teilchen der Masse m und Ladung q in einem äußeren elektromagnetischen Feld

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi = 0.$$

- Welcher Gleichung genügt $\bar{\Psi}$?
- Zeigen Sie, dass der Dirac-Strom $j^\mu = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ erhalten ist.
- Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen auch die Klein-Gordon-Gleichung $(\square + m^2)\Psi = 0$ erfüllen.
- Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes folgender Gleichung

$$[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu) + \frac{1}{2}q\sigma^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + m^2]\Psi = 0$$

genügt, wobei $F_{\lambda\mu}$ der Feldstärke-Tensor ist.

Aufgabe 2: Dirac-Spinoren und räumliche Drehungen

D_z sei die dreidimensionale Drehmatrix für die Drehung um den Winkel ϕ um die z -Achse und S_R die entsprechende Drehung der Spinoren.

- Zeigen Sie, dass die Transformationsmatrix S_R in folgender Form geschrieben werden kann

$$S_R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

- Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass $S_R^{-1}\gamma_j S_R = (D_z)_{ji}\gamma_i$ gilt.

Aufgabe 3: (*) Pauli-Gleichung und Spin-Bahn-Kopplung (2+2+1 = 5 Punkte)

Um die Pauli-Gleichung aus der Dirac-Gleichung abzuleiten wird diese im nichtrelativistischen Limes betrachtet. Dabei erhält man die Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})\begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + q\Phi\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit den zweikomponentigen Spinoren φ und χ . Um die Pauli-Gleichung zu erhalten kann nun die untere Komponente dieser Gleichung für $|i\hbar\partial_t\chi|, |q\Phi\chi| \ll |mc^2\chi|$ betrachtet werden, was dem nicht-relativistischen Limes entspricht. Diese Annahme führt zu folgender Beziehung zwischen φ und χ

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})}{2mc^2}\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}, \frac{q\Phi}{2mc^2}\right), \quad (2)$$

die in die obere Komponente von Gleichung (1) eingesetzt werden kann (siehe Vorlesung).

- a) Leiten Sie eine Relation zwischen φ und χ analog zu Gleichung (2) her. Berücksichtigen Sie hierbei zusätzlich Terme in erster Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{q\Phi}{2mc^2}\right)$. Nehmen Sie dafür wie oben $|i\hbar\partial_t\chi| \ll |mc^2\chi|$ an und entwickeln Sie den resultierenden Ausdruck für χ in $\frac{q\Phi}{2mc^2}$.
- b) Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall $\vec{A} = 0$. Setzen Sie nun den in Teilaufgabe (a) gefundenen Ausdruck für χ in die obere Komponente von Gleichung (1) ein. Hierbei tritt ein Term der Form

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Phi(\vec{r}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p}$$

auf. Formen Sie diesen Term um, indem Sie den Impulsoperator nach rechts durchkommutieren und die entstehenden Ausdrücke vereinfachen. Beachten Sie, dass der Impulsoperator \vec{p} die räumliche Ableitung enthält. Wie lautet die resultierende Gleichung für φ ?

- c) Wir betrachten nun den Fall $q = -e$, $\Phi = \Phi(r)$ und $\vec{A} = 0$, was beispielsweise einem Elektron im Wasserstoffatom entspricht. Identifizieren Sie in ihrem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe den Drehimpulsoperator. Wie sieht der Term des Hamiltonoperators aus, der diesen Operator enthält? Was bedeutet dieser Term physikalisch?

Aufgabe 4: (*) Nicht-relativistischer Limes für bilineare Kovarianten (5 Punkte)

Bestimmen Sie das führende Verhalten in v/c der bilinearen Kovarianten $\bar{u}\Gamma u$ (mit $\Gamma \in \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5\}$), wobei u eine Lösung der freien Dirac-Gleichung zum Impuls p^μ ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass die beiden unteren Komponenten von u von der Ordnung v/c relativ zu den oberen sind.