Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 7 Abgabe: 12.12.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 16.12.2025

Aufgabe 1: Stromerhaltung

Ψ sei eine Lösung der Dirac-Gleichung für ein Teilchen der Masse m und Ladung q in einem äußeren elektromagnetischen Feld

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi = 0\,.$$

a) Welcher Gleichung genügt $\overline{\Psi}$?

Solution

We compute first the hermitian conjugate of the Dirac equation

$$([\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi)^\dagger = \Psi^\dagger[\gamma^\mu(i\overleftarrow{\partial_\mu} - qA_\mu) - m]^\dagger$$

Next, we multiply this equation with γ^0 from the right

$$\Psi^\dagger[\gamma^\mu(i\overleftarrow{\partial_\mu} - qA_\mu) - m]^\dagger\gamma^0 = -\overline{\Psi}[i\gamma^\mu(\overleftarrow{\partial_\mu} + qA_\mu) + m] = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass der Dirac-Strom $j^\mu = i\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ erhalten ist.

Solution

By using the Dirac equation we obtain

$$\partial_\mu j^\mu = \left(\overline{\Psi}i\overleftarrow{\not{\partial}}\right)\Psi + \overline{\Psi}\left(i\not{\partial}\Psi\right) = \left[\overline{\Psi}\left(-q\not{A} - m\right)\right]\Psi + \overline{\Psi}\left[\left(q\not{A} + m\right)\Psi\right] = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen auch die Klein-Gordon-Gleichung ($(\Box + m^2)\Psi = 0$) erfüllen.

Solution

We consider first

$$0 = (i\partial\!\!\!/ - m)[i\partial\!\!\!/ - m]\Psi = [-\partial\!\!\!/^2 - 2mi\partial\!\!\!/ + m^2]\Psi.$$

Next we simplify

$$\partial\!\!\!/^2 = \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\left([\gamma^\mu,\gamma^\nu] + \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\right)\partial_\mu\partial_\nu = 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \Box,$$

where the term with the commutator vanishes due to antisymmetry, and

$$-2mi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = -2m^2\Psi.$$

So that in total we have

$$0 = [-\Box - 2m^2 + m^2]\Psi = -[\Box + m^2]\Psi.$$

d) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes folgender Gleichung

$$[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu) + \frac{1}{2}q\sigma^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + m^2]\Psi = 0$$

genügt, wobei $F_{\lambda\mu}$ der Feldstärke-Tensor ist.

Solution

With $D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$ we can write the Dirac equation as

$$\left(iD\!\!\!\!/ - m\right)\Psi = 0.$$

Next we multiply $(-iD\!\!\!\!/ - m)$ from the left and get

$$\left(-iD\!\!\!\!/ - m\right)\left(iD\!\!\!\!/ - m\right)\Psi = \left(D\!\!\!\!/ D\!\!\!\!/ + m^2\right)\Psi = \left(D^2 - i\sigma^{\mu\nu}D_\mu D_\nu + m^2\right)\Psi = 0,$$

where in the last step we used $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$. The middle term can be further simplified as

$$-i\sigma^{\mu\nu}D_\mu D_\nu\Psi = \frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi.$$

Aufgabe 2: Dirac-Spinoren und räumliche Drehungen

D_z sei die dreidimensionale Drehmatrix für die Drehung um den Winkel ϕ um die z-Achse und S_R die entsprechende Drehung der Spinoren.

a) Zeigen Sie, dass die Transformationsmatrix S_R in folgender Form geschrieben werden kann

$$S_R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Solution

The rotation matrix is given by

$$S_R = \exp\left(\frac{i}{2}\phi\sigma_{12}\right),$$

with

$$\sigma_{12} = \frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{i}{2}(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1) = i\gamma_1\gamma_2 \quad \text{and} \quad \sigma_{12}^2 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_2 = \gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2 = 1.$$

Next we calculate

$$S_R = \exp\left(\frac{i}{2}\phi\sigma_{12}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\phi\sigma_{12}}{2}\right)^n = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass $S_R^{-1}\gamma_j S_R = (D_z)_{ji}\gamma_i$ gilt.

Solution

The three-dimensional rotation matrix D_z is given by

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We calculate

$$\begin{aligned} S_R^{-1}\gamma_j S_R &= \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\gamma_j\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\gamma_j + i[\gamma_j, \sigma_{12}]\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\sigma_{12}\gamma_j\sigma_{12}. \end{aligned}$$

The two products of gamma matrices can be simplified as

$$[\gamma_j, \sigma_{12}] = 2i(g_{j1}\gamma_2 - g_{j2}\gamma_1),$$

and

$$\sigma_{12}\gamma_j\sigma_{12} = \gamma_j + 2(g_{j1}\gamma_1 + g_{j2}\gamma_2).$$

Lastly we calculate explicitly the expression for the different values of j

$$\begin{aligned} &S_R^{-1}\gamma_1 S_R = \gamma_1\left[\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] + 2\gamma_2\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \gamma_1\cos(\phi) + \gamma_2\sin(\phi) \\ &S_R^{-1}\gamma_2 S_R = \ldots = \gamma_2\cos(\phi) - \gamma_1\sin(\phi) \\ &S_R^{-1}\gamma_3 S_R = \ldots = \gamma_3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (*) Pauli-Gleichung und Spin-Bahn-Kopplung (2+2+1 = 5 **Punkte)**
Um die Pauli-Gleichung aus der Dirac-Gleichung abzuleiten wird diese im nichtrelativistischen

Limes betrachtet. Dabei erhält man die Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)\begin{pmatrix}\chi\\ \varphi\end{pmatrix} + q\Phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix} \tag{1}$$

mit den zweikomponentigen Spinoren φ und χ. Um die Pauli-Gleichung zu erhalten kann nun die untere Komponente dieser Gleichung für $|i\hbar\partial_t\chi|, |q\Phi\chi| \ll |mc^2\chi|$ betrachtet werden, was dem nicht-relativistischen Limes entspricht. Diese Annahme führt zu folgender Beziehung zwischen φ und χ

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)}{2mc^2}\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}, \frac{q\Phi}{2mc^2}\right), \tag{2}$$

die in die obere Komponente von Gleichung (1) eingesetzt werden kann (siehe Vorlesung).

a) Leiten Sie eine Relation zwischen φ und χ analog zu Gleichung (2) her. Berücksichtigen Sie hierbei zusätzlich Terme in erster Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{q\Phi}{2mc^2}\right)$. Nehmen Sie dafür wie oben $|i\hbar\partial_t\chi| \ll |mc^2\chi|$ an und entwickeln Sie den resultierenden Ausdruck für χ in $\frac{q\Phi}{2mc^2}$.

Solution

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi &= c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)\varphi + q\Phi\chi - 2mc^2\chi. \\ \rightarrow \left(2mc^2 - q\Phi\right)\chi &= c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}\right) \\ \chi &= \frac{1}{2mc}\left(1+\frac{q\Phi}{2mc^2}\right)\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}, \frac{q^2\Phi^2}{4m^2c^4}\right). \end{aligned}$$

b) Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall $\vec{A}=0$. Setzen Sie nun den in Teilaufgabe (a) gefundenen Ausdruck für χ in die obere Komponente von Gleichung (1) ein. Hierbei tritt ein Term der Form

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\;\Phi(\vec{r})\;\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$$

auf. Formen Sie diesen Term um, indem Sie den Impulsoperator nach rechts durchkommutieren und die entstehenden Ausdrücke vereinfachen. Beachten Sie, dass der Impulsoperator $\vec{p}$ die räumliche Ableitung enthält. Wie lautet die resultierende Gleichung für φ?

Solution

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(1+\frac{q\Phi}{2mc^2}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{p}+q\Phi\right)\varphi$$
$$= \left(\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2+\frac{q}{4m^2c^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Phi(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})+q\Phi\right)\varphi.$$

Now we can use the relation

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

and simplify the expression as

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Phi(r)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = -i\hbar(\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{p}+\hbar\vec{\sigma}\cdot\left((\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{p}\right)+\Phi\vec{p}^2.$$

The differential equations is then given by

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}+\frac{q}{4m^2c^2}\left(-i\hbar(\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{p}+\hbar\vec{\sigma}\cdot\left((\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{p}\right)+\Phi\vec{p}^2\right)+q\Phi\right)\varphi.$$

c) Wir betrachten nun den Fall $q=-e$, $\Phi=\Phi(r)$ und $\vec{A}=0$, was beispielsweise einem Elektron im Wasserstoffatom entspricht. Identifizieren Sie in ihrem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe den Drehimpulsoperator. Wie sieht der Term des Hamiltonoperators aus, der diesen Operator enthält? Was bedeutet dieser Term physikalisch?

Solution

The potential depends only on r, so that we can write

$$\vec{\nabla}\Phi(r) = \frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r}\vec{e_r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\vec{r}.$$

The relevant term can be rewritten as

$$-\frac{e}{4m^2c^2}\hbar\vec{\sigma}\cdot\left((\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{p}\right) = -\frac{e\hbar}{4m^2c^2r}\vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\vec{r}\times\vec{p} = -\frac{e\hbar}{2m^2c^2r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\vec{S}\cdot\vec{L},$$

which leads to a degeneration of energy levels with the same quantum number n but different quantum numbers l in the hydrogen atom.

Aufgabe 4: (*) Nicht-relativistischer Limes für bilineare Kovarianten (5 Punkte)

Bestimmen Sie das führende Verhalten in v/c der bilinearen Kovarianten $\bar{u}\Gamma u$ (mit $\Gamma\in\{\mathbb{1},\gamma^\mu,\sigma^{\mu\nu},\gamma^5,\gamma^\mu\gamma^5\}$), wobei u eine Lösung der freien Dirac-Gleichung zum Impuls p^μ ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass die beiden unteren Komponenten von u von der Ordnung v/c relativ zu den oberen sind.

Solution

The solution of the Dirac equation is given by

$$u = N \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\chi_s \end{pmatrix}, \qquad N = \sqrt{\frac{p_0+m}{2m}},$$

and we have to consider the following objects

$$\overline{u}\Gamma u = u^\dagger \gamma_0 \Gamma u = N^2 \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\chi_s \end{pmatrix}^\dagger \gamma_0 \Gamma \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\chi_s \end{pmatrix},$$

where Γ is one of the following matrices

$$\mathbb{1}_{4x4} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2x2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2x2} \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2x2} \\ \mathbb{1}_{2x2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2x2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2x2} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2x2} \\ -\mathbb{1}_{2x2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i\gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{i0} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}.$$

Solution

For taking the non-relativistic limit we have to rewrite p_0 in terms of $|\vec{p}|^2$ and m^2 and expand it in the limit $|\vec{p}|^2 \ll m^2$

$$p_0 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} = m\sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}} = m\left(1 + \frac{1}{2}\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right)\right).$$

The expansion of the overall normalization factor N^2 is given by

$$N^2 = \frac{p_0 + m}{2m} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}}\right) = 1 + \frac{1}{4}\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right),$$

and the expansion of the only denominator reads

$$\frac{1}{p_0 + m} = \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right)\right).$$

Now we can expand all scalar products, where we also need the relation

$$(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^\dagger(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) = p^i p^j \sigma^i \sigma^j = p^i p^j (\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k) = p^i p^i = |\vec{p}|^2.$$

We get for the first two scalar products

$$\begin{aligned}
\overline{u}\mathbb{1}u &= N^2\left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0 + m)^2}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{4}\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right)\right)\left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{4m^2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^2}{m^2}\right)\right)\right) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right),
\end{aligned}$$

and

$$\overline{u}\gamma_0 u = N^2\left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0 + m)^2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right).$$

Solution

The remaining scalar products are given by

$$
\begin{aligned}
\overline{u}\gamma_5 u &= \frac{N^2}{p_0+m}\left(\chi_s^\dagger\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_s - \chi_s^\dagger\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)^\dagger\chi_s\right) = 0 \\
\overline{u}\gamma_0\gamma_5 u &= \frac{N^2}{p_0+m}\left(\chi_s^\dagger\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_s + \chi_s^\dagger\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)^\dagger\chi_s\right) = \frac{2N^2}{p_0+m}\chi_s^\dagger\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_s \\
&= \frac{2N^2}{p_0+m}\left(\chi_s^\dagger(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\chi_s\right) = \frac{1}{m}\left(\chi_s^\dagger(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\chi_s\right) \\
\overline{u}\gamma^i u &= \frac{N^2}{p_0+m}\left(\chi_s^\dagger\sigma^i\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_s + \chi_s^\dagger\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)^\dagger\sigma^i\chi_s\right) = \frac{N^2}{p_0+m}\left(\chi_s^\dagger p_j\left\{\sigma^i,\sigma^j\right\}\chi_s\right) \\
&= \frac{2N^2 p_i}{p_0+m}\left(\chi_s^\dagger\sigma_0\chi_s\right) = \frac{p_i}{m} \\
\overline{u}\sigma^{0i}u &= -\overline{u}\sigma^{i0}u \\
&= i\frac{N^2}{p_0+m}\left(\chi_s^\dagger\sigma^i\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_s - \chi_s^\dagger\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)^\dagger\sigma^i\chi_s\right) = \frac{i}{2m}\left(\chi_s^\dagger p_j\left[\sigma^i,\sigma^j\right]\chi_s\right) \\
&= \frac{-\epsilon_{ijk}}{m}p_j\left(\chi_s^\dagger\sigma^k\chi_s\right) \\
\overline{u}\gamma^i\gamma_5 u &= N^2\left(\chi_s^\dagger\sigma^i\chi_s + \chi_s^\dagger\frac{\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)^\dagger\sigma^i\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)}{\left(p_0+m\right)^2}\chi_s\right) = \chi_s^\dagger\sigma^i\chi_s \\
\overline{u}\sigma^{ij}u &= \epsilon_{ijk}N^2\left(\chi_s^\dagger\sigma^k\chi_s - \chi_s^\dagger\frac{\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)^\dagger\sigma^k\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)}{\left(p_0+m\right)^2}\chi_s\right) = \epsilon_{ijk}\chi_s^\dagger\sigma^k\chi_s
\end{aligned}
$$