Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 8 Abgabe: 09.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 13.01.2026

Aufgabe 1: (*) Gesamtdrehimpuls (2 Punkte)
Die Dirac Gleichung kann in folgender Form geschrieben werden

$$i\partial_t \psi = H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\,\psi.$$

Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ mit dem Hamiltonian kommutiert, also $[H, \vec{J}] = 0$, wobei der Spin-Operator $\vec{S}$ gegeben ist durch

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (*) Projektoren für Energie und Spin ($1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte)

a) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\Lambda_\pm(p), \Sigma(s)]\,,$$

wobei $\Lambda_\pm(p) = \frac{\pm \not{p} + m}{2m}$ und $\Sigma(s) = \frac{1+\gamma_5 \not{s}}{2}$ den Energie- bzw. Spinprojektor bezeichnet. s^μ ist der Spin-Vierervektor und p^μ der Viererimpuls.

b) Zerlegen Sie s^μ in $\xi p^\mu + \eta g^{\mu 0}$, indem Sie $s^2 = -1$ und $s \cdot p = 0$ benutzen. Gegen welchen Ausdruck strebt s^μ für $|\vec{p}| \to \infty$?

c) Berechnen Sie $\Lambda_\pm \Sigma(s)$ für $|\vec{p}| \to \infty$.

d) Zeigen Sie, dass für freie Elektron-Wellenfunktionen mit s^μ und p^μ gilt

$$u_\alpha(p, s)\overline{u}_\beta(p, s) = (\Lambda_+(p))_{\alpha\delta}(\Sigma(s))_{\delta\beta}\,,$$

wobei α und β hier Spinorindizes sind.

Aufgabe 3: Gordon-Zerlegung

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$, wobei $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

b) Gegeben seien die Impulsraum-Spinoren $u(p_i)$ und $\overline{u}(p_f)$, die die Dirac-Gleichungen $(\not{p}_i - m)u(p_i) = 0$ bzw. $\overline{u}(p_f)(\not{p}_f - m) = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\overline{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i) \quad = \quad \overline{u}(p_f)\left[\frac{(p_i + p_f)^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu}{2m}\right]u(p_i)\,.$$

Aufgabe 4: Foldy-Wouthuysen Transformation

Wir betrachen die Dirac-Gleichung für ein Elektron im Wasserstoffatom und verwenden den Ansatz

$$\psi = e^{-iEt}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir folgendes System von gekoppelten Differentialgleichungen

$$T\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \left[-m + e\phi + \vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right) + m\beta\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix},$$

wobei $T = E - m$ die kinetische Energie ist. Zeigen Sie, dass nach der Foldy-Wouthuysen Transformation mit der unitären Matrix U

$$U = U^\dagger = C\beta + \frac{1}{2m}\vec{\alpha}\cdot\vec{p} \qquad \text{mit} \qquad C = \sqrt{1 - \frac{\vec{p}^2}{4m}},$$

die Diagonaleinträge für die obere Komponente φ aus dem Term

$$U\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)U^\dagger$$

nach der Entwicklung bis einschließlich $\mathcal{O}(\vec{p}^4/m^3)$ geschrieben werden können als

$$\frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{p} + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\right] - \frac{\vec{p}^4}{8m^3},$$

wobei wir $e|\phi|, e|\vec{A}| = \mathcal{O}(\vec{p}^2/m)$ annehmen.

Aufgabe 5: (*) System von zwei identischen Teilchen ($2 + 2 = 4$ Punkte)

Betrachten Sie ein System von zwei identischen Teilchen mit (i) Spin 1/2 und (ii) Spin 1, die jeweils ein von zwei Einteilchenzuständen annehmen können mit $H|0\rangle = -\varepsilon|0\rangle$ und $H|1\rangle = \varepsilon|1\rangle$. Vernachlässigen Sie dabei die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen.

(a) Geben Sie die gemeinsamen Eigenvektoren der Operatoren $\vec{S}^2$ und S_z an, wobei $\vec{S}$ der Gesamtspinoperator ist.
Hinweis: Benutzen Sie dazu z.B. die tabellierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus `https://pdg.lbl.gov/2018/reviews/rpp2018-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf`.

(b) Berechnen Sie die Energien und die Wellenfunktionen für alle möglichen Zustände. Geben Sie jeweils den Entartungsgrad an.

Aufgabe 6: System von N nicht-wechselwirkenden identischen Bosonen

Betrachten Sie ein System aus N nicht-wechselwirkenden identischen Bosonen, bei dem das i-te Niveau n_i-fach besetzt sei. Die Ein-Teilchen-Zustände seien gegeben durch $|\alpha, i_\alpha\rangle$, wobei α bzw. i_α den Teilchen- bzw. Niveauindex bezeichnen. Drücken Sie den Zustandsvektor dieses Systems unter Berücksichtigung des Symmetrisierungspostulats durch die Produktzustände

$$|1, i_1; 2, i_2; \ldots; N, i_N\rangle = |1, i_1\rangle \otimes \cdots \otimes |N, i_N\rangle$$

aus und leiten Sie die Normierungskonstante her.

Aufgabe 7: Lagrange Multiplikatoren

Finden Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ in

1. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
2. $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Benutzen sie die Methode der Lagrange Multiplikatoren.
