

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 9

Abgabe: 16.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 20.01.2026

Aufgabe 1: (*) Ideales Gas (2 + 2 = 4 Punkte)

Ist die Entropie eines Systems als Funktion der extensiven Zustandsgrößen aufgrund einer mikroskopischen Theorie bekannt, so können mit Hilfe der thermodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit angegeben werden.

a) Leiten Sie mit Hilfe der Entropie des idealen Gases

$$S(U, V, N) = S_0 \frac{N}{N_0} + N k_B \left[\frac{f}{2} \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) - \frac{f+2}{2} \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) \right],$$

die thermische und kalorische Zustandsgleichungen her.

b) Zeigen Sie, dass bei einer adiabatischen Zustandsänderung ($dS = 0$) mit konstanter Teilchenzahl N gilt:

$$pV^{\frac{f+2}{f}} = \text{const}, \quad VT^{\frac{f}{2}} = \text{const}$$

Gehen Sie hierfür jeweils von der differentiellen Form der Beziehung

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

aus.

Aufgabe 2: (*) Ideales Gas und Carnot Prozess (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Wir betrachten den Carnot-Prozess für ein ideales Gas. Dieser besteht aus vier Schritten:

- Isotherme Expansion von Volumen V_1 zu Volumen V_2 bei Temperatur T_1 .
- Adiabatische Expansion von Volumen V_2 zu Volumen V_2' . Dabei reduziert sich die Temperatur von T_1 zu T_2 .
- Isotherme Kompression von Volumen V_2' zu Volumen V_1' bei Temperatur T_2 .
- Adiabatische Kompression von Volumen V_1' zu Volumen V_1 bei einer Temperaturerhöhung von T_2 zu T_1 .

Nachdem das System diese vier Schritte durchlaufen hat befindet es sich wieder im Ausgangszustand mit Volumen V_1 und Temperatur T_1 .

- a) Bestimmen Sie für jeden Schritt die Arbeit, die von diesem System geleistet und die Wärme, die aufgenommen/abgegeben wird.
- b) Im zweiten und vierten Schritt ändert sich neben der Temperatur auch das Volumen. Das Verhältnis zwischen V_2 und V_2' sowie zwischen V_1 und V_1' kann über die Relationen in Aufgabe 1(b) gefunden werden. Bestimmen Sie damit den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses aus den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe.

- c) Der inverse Carnot-Prozess kann als eine Wärmepumpe angesehen werden und in diesem Kontext definiert man die *Heizeffektivität* als das Verhältnis der übertragenen Wärme an das heißere Bad (Q) und der vom System aufgenommenen Arbeit (W)

$$\eta^H = \frac{Q}{W}.$$

Drücken Sie η^H durch die Temperaturen T_1 und T_2 aus. Diskutieren Sie anschließend wann eine Wärmepumpe am effektivsten ist.

Aufgabe 3: Legendre-Transformation

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve an, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U -Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ wird als Legendre-Transformierte von $U(S)$ bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

- a) Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch $dU(S) = T(S)dS$ und $dF(T) = -S(T)dT$ gegeben sind.
- b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S , negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichen Vorzeichen der Krümmungen. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U / \partial S|_V$ sowie $-P = \partial U / \partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S, V)$ nach S und $P(S, V)$ nach V definiert Funktionen $S(T, V)$ und $V(S, P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T, V)$ und $H(S, P)$.
-