Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 9 Abgabe: 16.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 20.01.2026

Aufgabe 1: (*) Ideales Gas ($2 + 2 = 4$ Punkte)

Ist die Entropie eines Systems als Funktion der extensiven Zustandsgrößen aufgrund einer mikroskopischen Theorie bekannt, so können mit Hilfe der thermodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit angegeben werden.

a) Leiten Sie mit Hilfe der Entropie des idealen Gases

$$S(U, V, N) = S_0 \frac{N}{N_0} + N k_B \left[\frac{f}{2} \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) - \frac{f+2}{2} \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \right],$$

die thermische und kalorische Zustandsgleichungen her.

Solution

We use

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{N k_b f}{2U},$$
$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{N k_b}{V},$$

which then directly leads to the equations of state.

b) Zeigen Sie, dass bei einer adiabatischen Zustandsänderung ($\mathrm{d}S = 0$) mit konstanter Teilchenzahl N gilt:

$$pV^{\frac{f+2}{f}} = \text{const}, \qquad VT^{\frac{f}{2}} = \text{const}$$

Gehen Sie hierfür jeweils von der differentiellen Form der Beziehung

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{p}{T}\mathrm{d}V - \frac{\mu}{T}\mathrm{d}N$$

aus.

Solution

We consider the cae of a constant particle number:

$$\mathrm{d}N = 0.$$

Inserting $\mathrm{d}U$ thus yields

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{p}{T}\mathrm{d}V = \frac{f}{2}Nk_B\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}V,$$

In the next step, we replace $\mathrm{d}V$ using the equation of state with

$$\mathrm{d}V = \frac{Nk_b}{p}\mathrm{d}T - \frac{Nk_bT}{p^2}\mathrm{d}p,$$

and obtain

$$\mathrm{d}S = \frac{f}{2}Nk_B\frac{\mathrm{d}T}{T} + Nk_b\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{Nk_b}{p}\mathrm{d}p = 0.$$

Rearranging and integrating this equation yields

$$\left(\frac{f}{2}+1\right)\int_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}T'}{T'} = \int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p'}{p'}$$
$$\to \left(\frac{T}{T_0}\right)^{f/2+1} = \frac{p}{p_0},$$

and thus

$$\frac{T^{f/2+1}}{p} = \mathrm{const}.$$

Next we insert the equation of state and get

$$\frac{T^{f/2+1}V}{Nk_BT} = \mathrm{const} \to T^{f/2}V = \mathrm{const},$$

and from that we obtain

$$T^{f/2}V = \mathrm{const} \to TV^{2/f} = \mathrm{const} \to \frac{pV^{1+2/f}}{Nk_B} = \mathrm{const} \to pV^{1+2/f} = \mathrm{const}.$$

Aufgabe 2: (*) Ideales Gas und Carnot Prozess ($2+2+2=6$ **Punkte**)

Wir betrachten den Carnot-Prozess für ein ideales Gas. Dieser besteht aus vier Schritten:

- Isotherme Expansion von Volumen V_1 zu Volumen V_2 bei Temperatur T_1.
- Adiabatische Expansion von Volumen V_2 zu Volumen V_2'. Dabei reduziert sich die Temperatur von T_1 zu T_2.
- Isotherme Kompression von Volumen V_2' zu Volumen V_1' bei Temperatur T_2.
- Adiabatische Kompression von Volumen V_1' zu Volumen V_1 bei einer Temperaturerhöhung von T_2 zu T_1.

Nachdem das System diese vier Schritte durchlaufen hat befindet es sich wieder im Ausgangszustand mit Volumen V_1 und Temperatur T_1.

a) Bestimmen Sie für jeden Schritt die Arbeit, die von diesem System geleistet und die Wärme, die aufgenommen/abgegeben wird.

Solution

- Isothermal expansion from V_1 to V_2
  The work performed by the system can be calculated with

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p(V,T_1)\mathrm{d}V = Nk_BT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = Nk_BT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

  Since the internal energy of the gas does not depend on the volume, it remains unchanged and therefore we have

$$Q_1 = W_1 = Nk_bT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

- Adiabatic expansion from T_1 to T_2, where $T_2 < T_1$
  Adiabatic processes have the property $\delta Q = 0$. The work of the system therefore corresponds to the change in the internal energy.

$$W_2 = \frac{f}{2}Nk_b\left(T_1 - T_2\right).$$

- Isothermal compression from V_2' to V_1'.
  Analogous to step 1, this leads to

$$Q_3 = W_3 = Nk_BT_2 \ln\left(\frac{V_1'}{V_2'}\right).$$

- Adiabatic compression from T_2 to T_1
  Again, we have $\delta Q = 0$ and using the same calculation as in step 2, we obtain

$$W_4 = \frac{f}{2}Nk_B(T_2 - T_1).$$

b) Im zweiten und vierten Schritt ändert sich neben der Temperatur auch das Volumen. Das Verhältnis zwischen V_2 und V_2' sowie zwischen V_1 und V_1' kann über die Relationen in Aufgabe 1(b) gefunden werden. Bestimmen Sie damit den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses aus den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe.

Solution

We have the following relations

$$V_2' = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{f/2}, V_1' = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{f/2}.$$

The Carnot efficiency indicates the ratio of work output to heat input. The heat input corresponds to Q_1 which then leads to

$$\eta = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{Q_1}.$$

With $W_2 = -W_4$, $W_1 = Q_1$ and $W_3 = Q_3$ this simplifies to

$$\eta = 1 + \frac{Q_3}{Q_1} = 1 + \frac{T_2 \ln\left(\frac{V_1'}{V_2'}\right)}{T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

c) Der inverse Carnot-Prozess kann als eine Wärmepumpe angesehen werden und in diesem Kontext definiert man die *Heizeffektivität* als das Verhältnis der übertragenen Wärme an das heißere Bad (Q) und der vom System aufgenommenen Arbeit (W)

$$\eta^H = \frac{Q}{W}.$$

Drücken Sie η^H durch die Temperaturen T_1 und T_2 aus. Diskutieren Sie anschließend wann eine Wärmepumpe am effektivsten ist.

Solution

The work input of the inverse Carnot process is equal to the work output of the Carnot process

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4,$$

and the heat transferred to the hotter bath corresponds

$$Q = Q_1.$$

In total we obtain

$$\eta^H = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_3} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

The efficiency of the heat pump is highest when $T_1 \approx T_2$.

Aufgabe 3: Legendre-Transformation

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve an, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = \mathrm{d}U/\mathrm{d}S$ sowie den U-Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion F(T) wird als Legendre-

Transformierte von U(S) bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

a) Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch $\mathrm{d}U(S) = T(S)\mathrm{d}S$ und $\mathrm{d}F(T) = -S(T)\mathrm{d}T$ gegeben sind.

solution

We have

$$F = F(T) = U(S(T)) - S(T)T,$$

and therefore

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial U}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial T}\mathrm{d}T - \frac{\partial S}{\partial T}T\mathrm{d}T - S(T)\mathrm{d}T.$$

Since $T = \partial U/\partial S$ is the slope of the function $U(S)$, the first two terms cancels each other and we get

$$\mathrm{d}F(T) = -S(T)\mathrm{d}T.$$

b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S,V)$ mit positiver Steigung bezüglich S, negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichen Vorzeichen der Krümmungen. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U/\partial S|_V$ sowie $-P = \partial U/\partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S,V)$ nach S und $P(S,V)$ nach V definiert Funktionen $S(T,V)$ und $V(S,P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T,V)$ und $H(S,P)$.

solution

For the internal energie $U(S,V)$ we get

$$\mathrm{d}U(S,V) = T(S,V)\mathrm{d}S - P(S,V)\mathrm{d}V,$$

The Legendre transformation leads to

$$F(T,V) = U(S(T,V),V) - S(T,V)T,$$

and we get the following differential for F

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(T,V) &= T\mathrm{d}S - P(S(T,V),V)\mathrm{d}V - S(T,V)\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S\\ &= -S(T,V)\mathrm{d}T - P(S(T,V),V)\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

For the enthalpy we obtain

$$H(S<P) = U(S,V(S,P)) + V(S,P)P,$$

and the differential

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H(S,P) &= T(S,V(S,P))\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + V(S,P)\mathrm{d}P + P\mathrm{d}V\\ &= T(S,V(S,P))\mathrm{d}S + V(S,P)\mathrm{d}P.\end{aligned}$$