

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 10

Abgabe: 23.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 27.01.2026

Aufgabe 1: Zentraler Grenzwertsatz

Es sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X_n}(x) = \frac{n^x e^{-n}}{x!} \quad \text{mit } x = 0, 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie, dass sich die Verteilung der Größe

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

im Limit $n \rightarrow \infty$ der einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ annähert.

Hinweis: Leiten Sie die Momenterzeugende Funktion $M_{X_n}(t)$ von X_n her, indem Sie die Gleichung

$$M_{X_n}(t) = \langle e^{tX_n} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle X_n^k \rangle}{k!} t^k,$$

benutzen und zeigen Sie danach, dass sich $M_{(X_n - n)/\sqrt{n}}(t)$ im betrachteten Limit der Momenterzeugenden Funktion der Normalverteilung annähert.

Aufgabe 2: (*) Phasenraumdichte und Liouville-Gleichung (6 Punkte)

- Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. Skizzieren Sie den Phasenraum $(\{x, p\})$ für eine gegebene Amplitude A_0 und gegebene Frequenz w_0 . Wie sieht der Phasenraum für Amplituden $A_1 > A_0$ und $A_2 < A_0$ aus? Wie verändert sich der Phasenraum für $w_1 > w_0$ und $w_2 < w_0$?
- Betrachten Sie eine rotierende Scheibe mit Trägheitsmoment I . Es bietet sich an, das System mit den Koordinaten $\{\varphi, p_\varphi\}$ zu beschreiben, wobei φ der Drehwinkel und p_φ der konjugierte kanonische Impuls ist. Dann ist die Hamiltonfunktion gegeben durch $H = p_\varphi^2 / (2I)$. Stellen Sie die Liouville-Gleichung für die Phasenraumdichte $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$ auf. Sie erhalten eine Gleichung, die die zeitliche Ableitung von ρ und die Ableitung nach φ in Beziehung setzt.
- Verwenden Sie die doppelte Fourier-Transformation

$$\rho = \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i\omega t} e^{-ik\varphi},$$

um aus der Differentialgleichung eine algebraische Gleichung zu erhalten. Daraus können Sie die Dispersionsrelation ableiten. Wie lautet diese?

- Bei der Rücktransformation von k nach φ

$$\rho = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i(\omega t - k\varphi)}$$

können Sie annehmen, dass $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 = \text{const.}$ ist. Außerdem sollten Sie die Dispersionsrelation verwenden. Welchen Ausdruck erhalten Sie für ρ ?

- e) Interpretieren Sie das Ergebnis aus (c) in der $\varphi - p_\varphi$ -Ebene falls $\tilde{\rho}_0$ nur für $p_\varphi \in [L_0 - \Delta L, L_0 + \Delta L]$ von Null verschieden ist und dann den Wert $\tilde{\rho}_0 = 1/(2\Delta L)$ annimmt. Welche geometrische Form hat der Phasenraum?
- f) Verwenden Sie $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$ aus (e), um den Mittelwert von φ und die Standardabweichung zu berechnen. Diskutieren Sie die Abhängigkeiten von t .

Aufgabe 3: (*) Dichtematrix (1 + 2 + 1 = 4 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines Spin-1/2 Systems

$$H = gB \frac{\hbar}{2} \sigma_x,$$

mit den Pauli Spin-Operatoren

$$\begin{aligned} \sigma_x &= |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \\ \sigma_y &= -i |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + i |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \\ \sigma_z &= |\uparrow\rangle \langle \uparrow| - |\downarrow\rangle \langle \downarrow|, \end{aligned}$$

wobei die Zustände $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ die Eigenzustände zu σ_z sind. Die Dichtematrix $\rho(t)$ sei zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\rho(t = 0) = p_z |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + p_x |\uparrow\rangle_x \langle \uparrow|_x,$$

mit $p_z, p_x > 0$, $p_z + p_x = 1$ und $\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ sind die Eigenzustände zu σ_x . Die Zeitentwicklung der Dichtematrix ist gegeben durch $\rho(t) = \exp(-iHt/\hbar)\rho(0)\exp(iHt/\hbar)$.

- a) Drücken Sie die Vektoren $\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ aus.
- b) Bestimmen Sie $\rho(t)$ für $t \geq 0$.
- c) Berechnen Sie $\langle \sigma_j \rangle(t) = \text{Tr}[\rho(t)\sigma_j]$ für $j = x, y, z$.

Aufgabe 4: Oberfläche der Einheitskugel

Berechnen Sie die Oberfläche der Einheitskugel in d Dimensionen. Kontrollieren Sie Ihr Resultat für $d = 1, 2, 3$.

Hinweis: Betrachten Sie dafür das Integral

$$I_d = \int_{\mathbb{R}^d} dx \exp(-|\vec{x}|^2),$$

und berechnen Sie im ersten Schritt das Integral, indem Sie es in d eindimensionale Integrale aufspalten. Im zweiten Schritt benutzen Sie d -dimensionale Kugelkoordinaten um die Integration in eine Radial- und Winkelintegration aufzuteilen, um daraus den Oberflächeninhalt zu bestimmen.