

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 10

Abgabe: 23.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 27.01.2026

Aufgabe 1: Zentraler Grenzwertsatz

Es sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X_n}(x) = \frac{n^x e^{-n}}{x!} \quad \text{mit } x = 0, 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie, dass sich die Verteilung der Größe

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

im Limit $n \rightarrow \infty$ der einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ annähert.

Hinweis: Leiten Sie die Momenterzeugende Funktion $M_{X_n}(t)$ von X_n her, indem Sie die Gleichung

$$M_{X_n}(t) = \langle e^{tX_n} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle X_n^k \rangle}{k!} t^k,$$

benutzen und zeigen Sie danach, dass sich $M_{(X_n - n)/\sqrt{n}}(t)$ im betrachteten Limit der Momenterzeugenden Funktion der Normalverteilung annähert.

Solution

We start with

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) &= \langle e^{tX_n} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle X_n^k \rangle}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{x=0}^{\infty} x^k f_{X_n}(x)}{k!} t^k \\ &= e^{-n} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{n^x}{x!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k t^k}{k!} \right) = e^{n(e^t - 1)} \end{aligned}$$

In the next step, we derive

$$M_{\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}}(t) = \langle e^{t \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}} \rangle = e^{-t\sqrt{n}} \langle e^{t \frac{X_n}{\sqrt{n}}} \rangle = e^{-t\sqrt{n} + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1)}.$$

In the $n \rightarrow \infty$ limit, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{t^4}{24n} + \dots} = e^{\frac{t^2}{2}},$$

which agrees with the moment generating function of the normal distribution $\mathcal{N}(0, 1)$.

Aufgabe 2: (*) Phasenraumdichte und Liouville-Gleichung (6 Punkte)

- a) Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. Skizzieren Sie den Phasenraum $(\{x, p\})$ für eine gegebene Amplitude A_0 und gegebene Frequenz ω_0 . Wie sieht der Phasenraum für Amplituden $A_1 > A_0$ und $A_2 < A_0$ aus? Wie verändert sich der Phasenraum für $\omega_1 > \omega_0$ und $\omega_2 < \omega_0$?

Solution

The phase space for an harmonic oscillator is an ellipse in the coordinate system $\{x, p\}$. For example, we have

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t)$$

for $x(t)$ and

$$p(t) = mv(t) = m\dot{x}(t) = mA_0\omega \cos(\omega t)$$

for $p(t)$, which can be combined into an ellipse. For $A_1, A_2 \neq A_0$ both $x(t)$ and $p(t)$ are rescaled, so that this changes only the scaling of the ellipse. The change of the frequency only rescales $p(t)$ while $x(t)$ is not affected. Thus, the ellipse is either stretched or.

- b) Betrachten Sie eine rotierende Scheibe mit Trägheitsmoment I . Es bietet sich an, das System mit den Koordinaten $\{\varphi, p_\varphi\}$ zu beschreiben, wobei φ der Drehwinkel und p_φ der konjugierte kanonische Impuls ist. Dann ist die Hamiltonfunktion gegeben durch $H = p_\varphi^2/(2I)$. Stellen Sie die Liouville-Gleichung für die Phasenraumdichte $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$ auf. Sie erhalten eine Gleichung, die die zeitliche Ableitung von ρ und die Ableitung nach φ in Beziehung setzt.

Solution

We obtain for the Liouville equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{H, \rho\} = -\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial p_\varphi}\right) = -\frac{p_\varphi}{I} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}.$$

- c) Verwenden Sie die doppelte Fourier-Transformation

$$\rho = \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i\omega t} e^{-ik\varphi},$$

um aus der Differentialgleichung eine algebraische Gleichung zu erhalten. Daraus können Sie die Dispersionsrelation ableiten. Wie lautet diese?

Solution

When we insert the relation for $\rho(t)$ from the first part, we obtain the dispersion relation;

$$\int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) i\omega e^{i\omega t} e^{-ik\varphi} = -\frac{p_\varphi}{I} \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i\omega t} (-ik) e^{-ik\varphi}$$

$$\rightarrow \omega = k \frac{p_\varphi}{I}$$

d) Bei der Rücktransformation von k nach φ

$$\rho = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i(\omega t - k\varphi)}$$

können Sie annehmen, dass $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 = \text{const.}$ ist. Außerdem sollten Sie die Dispersionsrelation verwenden. Welchen Ausdruck erhalten Sie für ρ ?

Solution

We use the dispersion relation and replace $\tilde{\rho}$ with $\tilde{\rho}_0$. This leads to

$$\rho = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i(\omega t - k\varphi)} = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}_0 e^{ik(\frac{p_\varphi}{I}t - \varphi)} = \tilde{\rho}_0 \delta \left[\frac{p_\varphi t}{I} - \varphi \right],$$

where we used

$$\int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \delta(x).$$

e) Interpretieren Sie das Ergebnis aus (c) in der $\varphi - p_\varphi$ -Ebene falls $\tilde{\rho}_0$ nur für $p_\varphi \in [L_0 - \Delta L, L_0 + \Delta L]$ von Null verschieden ist und dann den Wert $\tilde{\rho}_0 = 1/(2\Delta L)$ annimmt. Welche geometrische Form hat der Phasenraum?

Solution

In this case we obtain

$$\rho = \frac{1}{2\Delta L} \delta \left[\frac{p_\varphi t}{I} - \varphi \right]$$

in the region where ρ does not vanish. The phase-space density is given by a straight line, which moves depending on the time. For $t = 0$ this line is on the p_φ axis. For $t \neq 0$ we obtain from delta function the condition $\varphi = t p_\varphi / I$, which fixes the value of φ . For increasing t , this straight line tilts.

f) Verwenden Sie $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$ aus (e), um den Mittelwert von φ und die Standardabweichung zu berechnen. Diskutieren Sie die Abhängigkeiten von t .

Solution

We calculate first the average of φ :

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{2\Delta L} \int_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L} dp_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \delta \left[\frac{p_\varphi t}{I} - \varphi \right] \varphi = L_0 \left(\frac{t}{I} \right).$$

In a similar way we get

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{t^2}{3I^2} (3L_0^2 + \Delta L^2),$$

and the standard deviation is given by

$$\sqrt{(\langle \varphi \rangle^2 - \langle \varphi^2 \rangle)} = \frac{\Delta L t}{\sqrt{3}I}.$$

Aufgabe 3: (*) Dichtematrix (1 + 2 + 1 = 4 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines Spin-1/2 Systems

$$H = gB \frac{\hbar}{2} \sigma_x,$$

mit den Pauli Spin-Operatoren

$$\begin{aligned}\sigma_x &= |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \\ \sigma_y &= -i |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + i |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \\ \sigma_z &= |\uparrow\rangle \langle \uparrow| - |\downarrow\rangle \langle \downarrow|,\end{aligned}$$

wobei die Zustände $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ die Eigenzustände zu σ_z sind. Die Dichtematrix $\rho(t)$ sei zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\rho(t = 0) = p_z |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + p_x |\uparrow\rangle_x \langle \uparrow|_x,$$

mit $p_z, p_x > 0$, $p_z + p_x = 1$ und $\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ sind die Eigenzustände zu σ_x . Die Zeitentwicklung der Dichtematrix ist gegeben durch $\rho(t) = \exp(-iHt/\hbar)\rho(0)\exp(iHt/\hbar)$.

- a) Drücken Sie die Vektoren $\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ aus.

Solution

The vectors $\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ in the basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ can be obtained by calculating the eigenvectors to σ_x . These eigenvectors are then given by

$$\begin{aligned}|\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \\ |\downarrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle).\end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie $\rho(t)$ für $t \geq 0$.

Solution

The time evolution operator can be written as

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) = \exp(-i\omega t \sigma_x) = \cos(\omega t) - i\sigma_x \sin(\omega t),$$

with $\omega = gB/2$. Using the relation of part a), we rewrite $\rho(0)$ as

$$\rho(0) = \frac{p_z}{2} (1 + \sigma_z) + \frac{p_x}{2} (1 + \sigma_x),$$

where we used the definition of σ_3 , $|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = 1$ and

$$|\uparrow\rangle\langle\uparrow| = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) + \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) = \frac{1}{2} (1 + \sigma_z).$$

Next we calculate the following commutator

$$[U(t), \rho(0)] = -i \sin(\omega t) \left(\frac{p_z}{2} [\sigma_x, \sigma_z] + \frac{p_x}{2} [\sigma_x, \sigma_x] \right) = -p_z \sin(\omega t) \sigma_y,$$

where we used $[\sigma_x, \sigma_z] = -2i\sigma_y$. Finally, $\rho(t)$ is given by

$$\begin{aligned} \rho(t) &= U(t)\rho(0)U^\dagger(t) = \rho(0)U(t)U^\dagger(t) + [U(t), \rho(0)]U^\dagger \\ &= \frac{p_x + p_z}{2} + \frac{p_x}{2}\sigma_x - \frac{p_z}{2}\sin(2\omega t)\sigma_y + \left(\frac{p_z}{2} - p_z \sin^2(\omega t)\right)\sigma_z \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie $\langle\sigma_j\rangle(t) = \text{Tr}[\rho(t)\sigma_j]$ für $j = x, y, z$.

Solution

For the expectation values we need the traces

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma_i) &= 0, \\ \text{Tr}(\sigma_i\sigma_j) &= \text{Tr}(\sigma_j\sigma_i) = \text{Tr}(-\sigma_i\sigma_j + 2\delta_{ij}) \rightarrow \text{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}, \end{aligned}$$

where we used in the first step the cyclicity of trace and in the second $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$. The expectation values are then given by

$$\begin{aligned} \langle\sigma_x\rangle(t) &= \text{Tr}(\rho(t)\sigma_x) = p_x \\ \langle\sigma_y\rangle(t) &= \text{Tr}(\rho(t)\sigma_y) = -p_z \sin(2\omega t) \\ \langle\sigma_z\rangle(t) &= \text{Tr}(\rho(t)\sigma_z) = p_z (1 - 2\sin^2(\omega t)) = p_z \cos(2\omega t). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Oberfläche der Einheitskugel

Berechnen Sie die Oberfläche der Einheitskugel in d Dimensionen. Kontrollieren Sie Ihr Resultat für $d = 1, 2, 3$.

Hinweis: Betrachten Sie dafür das Integral

$$I_d = \int_{\mathbb{R}^d} dx \exp(-|\vec{x}|^2),$$

und berechnen Sie im ersten Schritt das Integral, indem Sie es in d eindimensionale Integrale aufspalten. Im zweiten Schritt benutzen Sie d -dimensionale Kugelkoordinaten um die Integra-

tion in eine Radial- und Winkelintegration aufzuteilen, um daraus den Oberflächeninhalt zu bestimmen.

Solution

The surface of a unit sphere in d dimensions is defined as

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 = |x|^2 = 1.$$

For the calculation of the surface we consider first the following integral

$$I_d = \int_{\mathbb{R}^d} dx \exp(-|x|^2) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp(-x_1^2) \right)^d = I_1^d$$

In spherical coordinates the integral I_d can be written as

$$I_d = \int_0^{\infty} dr \int d\Omega_d \exp(-r^2) r^{d-1},$$

where the surface of the unit sphere in d dimensions is given by

$$O_d(1) = \int d\Omega_d.$$

Solution

We know already the solution of the integral $I_d = I_1^d = \sqrt{\pi}^d$. The integral over the radial part can be obtained by considering the definition of the Gamma function

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^n = \Gamma(n+1).$$

$$\int_0^{\infty} dr \exp(-r^2) r^{d-1} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{\frac{d}{2}-1} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right),$$

where we used the substitution $r^2 = t$. Therefore, we obtain for the surface

$$O_d(1) = \frac{2\sqrt{\pi}^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$

We check our results by considering $d = \{1, 2, 3\}$:

$$O_1(1) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)} = 2$$

$$O_2(1) = \frac{2\sqrt{\pi}^2}{\Gamma(2/2)} = 2\pi$$

$$O_3(1) = \frac{2\sqrt{\pi}^3}{\Gamma(3/2)} = \frac{4\sqrt{\pi}^3}{\Gamma(1/2)} = 4\pi.$$