

# Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 11

Abgabe: 30.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 03.02.2026

---

## Aufgabe 1: (\*) Mischung von idealen Gasen (2 + 2 = 4 Punkte)

Der Erwartungswert eines Operators  $O$  berechnet sich über

$$\langle O \rangle = \int \frac{d^{3N}p d^{3N}q}{(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{1}{N!} \rho O,$$

wobei  $\rho$  die Dichtematrix ist. Dabei wurde der Faktor  $1/N!$  aufgrund der Ununterscheidbarkeit der Teilchen eingeführt. Überzeugen Sie sich davon (vgl. Vorlesung), dass auf der Basis obiger Gleichung die Entropie eines idealen Gases gegeben ist durch

$$S = kN \log(V/N) + \dots,$$

wobei Terme, die hier nicht von Interesse sind, nicht explizit angegeben sind. Falls der Faktor  $1/N!$  nicht vorhanden ist, erhält man für die Entropie

$$S_{\text{kl}} = kN \log(V) + \dots$$

Betrachten Sie nun ein isoliertes System, das in zwei gleich große Kammern mit Volumen  $V$  aufgeteilt ist. Diese sind durch eine Trennwand separiert. In jedem befindet sich ein ideales Gas. Die Trennwand wird nun entfernt, so dass eine quasistatische (aber irreversible) Durchmischung stattfindet. Berechnen Sie die Änderung der Entropie für folgende Fälle

- a) In beiden Kammern befinden sich unterschiedliche ideale Gase.
- b) In beiden Kammern befinden sich das gleiche ideale Gase.

Verwenden Sie sowohl  $S$  als auch  $S_{\text{kl}}$ . Interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

---

## Aufgabe 2: (\*) Ideales Gas (3 + 3 = 6 Punkte)

Das ideale Gas beschreibt ein System aus  $N$  identischen, nicht wechselwirkenden Teilchen in einem Volumen  $V$ . Wir unterscheiden zwischen zwei Arten von idealem Gas, dem Fermi- und Bose-Gas. Zusätzlich lässt sich ein nützliches mathematisches Modell definieren, das sogenannte Boltzmann-Gas oder ideale Gas.

- (a) Impuls und Position von klassischen Teilchen sind kontinuierlich und scharf messbar. Die kanonische Zustandssumme des Boltzmann-Gases hat die Form

$$Z_N \propto \int \frac{1}{N!} e^{-\beta H(x,p)} d^{3N}x d^{3N}p.$$

Führen Sie einen Parameter (bzw. ein Integral-Maß)  $h$  ein um die Zustandssumme dimensionslos zu machen. Zeigen Sie, dass gilt  $Z_N = Z_1^N / N!$ , wobei  $Z_1$  die Zustandssumme von einem Teilchen ist und berechnen  $Z_N$ . Berechnen Sie darau die Freie Energie und bestimmen Sie die Entropie. Zeigen Sie, dass die Entropie von der Wahl von  $h$  abhängt und finden Sie die neue Entropie wenn Sie  $h$  mit  $\alpha$  reskalieren.

(b) Betrachten Sie nun ein quantenmechanisches System. Bestimmen Sie  $Z_N$  über

$$Z_N = \text{Tr} \left[ e^{-\beta H} \right] = \sum_n \langle \Phi_n | e^{-\beta E_n} | \Phi_n \rangle,$$

wobei  $H$  der Hamilton-Operator eines freien Teilchens ist und die Wellenfunktionen im Ortsraum gegeben sind durch

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \Phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\theta \in S_N} (\pm 1)^\theta \phi_{\vec{p}_1}(\vec{x}_{\theta_1}) \dots \phi_{\vec{p}_N}(\vec{x}_{\theta_N}), \quad \phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}},$$

mit  $+, -$  für Bosonen und Fermionen.  $S_N$  ist die Menge aller möglichen Permutationen, die keinen neuen Zustand erzeugen. Zeigen Sie, dass der führende Term von  $Z_N$  im thermodynamischen Limes bei hohen Temperaturen mit dem klassischen Ergebnis aus (a) übereinstimmt. Benutzen Sie dafür das Maß  $h = 2\pi\hbar$  für  $dx dp$ .

*Hinweis:* Die Summe in  $Z_N$  kann im thermodynamischen Limes durch ein Integral ersetzt werden:

$$\sum_n \rightarrow \frac{1}{N!} \left( \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right)^N \int d^{3N}p$$

### Aufgabe 3: Zustandsdichte

Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen in einem  $D$ -dimensionalen Kasten der Kantenlänge  $L$ , für das die Energie-Impuls-Beziehung  $\epsilon(p)$  besteht. Die Zustandsdichte  $\mathcal{N}(\epsilon)$  ist definiert als

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \delta(\epsilon - \epsilon(p)).$$

Es sei nun  $\epsilon(|\vec{p}|) = \alpha |\vec{p}|^n$ . Bestimmen Sie  $\mathcal{N}(\epsilon)$  für  $D = 1, 2, 3$ . Geben Sie insbesondere die Ergebnisse für Elektronen ( $\epsilon(p) = |\vec{p}|^2/(2m)$ ) und Photonen ( $\epsilon(p) = c|\vec{p}|$ ) an.