Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 12 Abgabe: 06.02.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 10.02.2026

Aufgabe 1: Entropie eines Spinsystems

Betrachten Sie ein System von N Spin-1/2-Teilchen ohne Wechselwirkung untereinander. Berechnen Sie die Entropie im kanonischen Ensemble mit Hilfe der Formel $S_{kan} = -k \sum_i w_i \ln w_i$ und vergleichen Sie mit $S = -(\partial F/\partial T)_B$ (vgl. Vorlesung).

Solution

For each spin-1/2 particle, we have the partition function

$$z_i = \sum_{\sigma_i=\pm1} e^{\beta E_i \sigma_i} = e^{\beta E_i} + e^{-\beta E_i} = 2\cosh(\beta E_i)\,,$$

with E_i being the energy of a two-level system. Let us assume all $E_i = E$, then the partition function for the whole system is

$$Z = \prod_i z_i = \prod_i 2\cosh(\beta E_i) = \left[2\cosh\left(\beta E\right)\right]^N\ ,$$

and

$$\begin{aligned} w_i^{\pm} &= \frac{e^{\pm\beta E_i}}{z_i} = \frac{e^{\pm\beta E}}{2\cosh(\beta E)}, \\ S_{kan} &= -k\sum_i w_i \log(w_i) = k\left(N\log\left[2\cosh\left(\beta E\right)\right] - \beta E N \tanh\left(\beta E\right)\right)\ . \end{aligned}$$

On the other hand, we have the free energy

$$F = -kT\log Z = -NT\log\left[2\cosh\left(\beta E\right)\right]$$

and entropy

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k\left(N\log\left[2\cosh\left(\beta E\right)\right] - \beta E N\tanh\left(\beta E\right)\right).$$

Aufgabe 2: System von Oszillatoren $(2+2=4)$

Wir betrachten ein System von N quantenmechanischen Ozsillatoren, mit Frequenzen ω_i ($i = 1,\ldots,N$). Die Energieniveaus eines Oszillators sind gegeben durch $(n+1/2)\hbar\omega_i$ ($n = 0,1,2,\ldots$).

a) Berechnen Sie die Zustandssumme für dieses System im kanonischen Ensemble.

Solution

We start with

$$\begin{aligned}
Z = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right] &= \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n| e^{-\beta H_i} |n\rangle = \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_i} \\
&= \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta\hbar\omega_i}\right)^n = \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_i} \left(\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_i}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{N} \left[2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2}\right)\right]^{-1}
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die freie Energie, die mittlere Energie und die spezifische Wärmekapazität.

Solution

The free energy is

$$F = -\frac{1}{\beta}\log(Z) = \sum_{i=1}^{N} kT \log\left[2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2}\right)\right] ,$$

and the average energy

$$U = -\frac{\partial \log(Z)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar\omega_i}{2} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2}\right) ,$$

and the specific heat capacity

$$c_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k}\left(\frac{\hbar\omega_i}{2T}\right)^2 \left[\sinh\left(\frac{\hbar\omega_i}{2kT}\right)\right]^{-2} .$$

Aufgabe 3: Magnetisches Moment für allgemeinen Spin $(2+2+1+1=6)$

Betrachten Sie ein System von N Teilchen mit einem allgemeinen Drehimpuls $\vec{J}$ mit der Quantenzahl J ohne Wechselwirkung in einem homogenen äußeren Magnetfeld entlang der z-Achse. Der Einteilchenhamiltonoperator ist gegeben durch

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \qquad \text{mit} \qquad \vec{\mu} = -g\mu_B\vec{J}/\hbar.$$

a) Bestimmen Sie die kanonische 1-Teilchen-Zustandssumme Z_1.

Solution

We calculate the partition function as

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{m=-J}^{J} e^{-\beta E_m} = \sum_{m=-j}^{J} e^{-\beta E_0 m} \\ &= e^{\beta E_0 J} \sum_{m=0}^{2J} e^{-\beta E_0 m} = e^{\beta E_0 J} \frac{1 - e^{-\beta E_0 (2J+1)}}{1 - e^{-\beta E_0}} \\ &= \frac{e^{\frac{\beta E_0 (2J+1)}{2}} - e^{-\frac{\beta E_0 (2J+1)}{2}}}{e^{\beta E_0/2} - e^{-\beta E_0/2}} = \frac{\sinh(\beta E_0 (J + \frac{1}{2}))}{\sinh(\beta E_0/2)}, \end{aligned}$$

with $E_0 = g\mu_B B$.

b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \mu_z \rangle$ von einem Teilchen geschrieben werden kann als

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z_1}{\partial B},$$

und berechnen Sie damit den Erwartungswert.

Solution

We consider first

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log Z_1}{\partial B} &= \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial B} = \frac{1}{Z_1} \sum_{m=-J}^{J} \frac{\partial}{\partial B} e^{-\beta E_0 m} \\ &= \beta \left(\frac{1}{Z_1} \sum_{m=-J}^{J} (-g\mu_B m) e^{-\beta E_0 m} \right) = \beta \langle \mu_z \rangle, \end{aligned}$$

from which the relation directly follows. Next we calculate the expectation value

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z_1}{\partial B} = g\mu_B \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) \coth \left(\beta E_0 \left(J + \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \coth \left(\frac{\beta E_0}{2} \right) \right).$$

c) Betrachten Sie den Grenzfall für kleine Felder $\vec{B}$, bzw. große Temperaturen und zeigen Sie, dass man für die magnetische Suszeptibilität χ wieder das Curie-Gesetz erhält, also $\chi \sim 1/T$.

Solution

We expand first the expectation value for small B

$$\begin{aligned}\langle\mu_z\rangle &= g\mu_B\left(\left(J+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\beta E_0\left(J+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\beta E_0}{3}\left(J+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\beta E_0}+\frac{\beta E_0}{6}\right)\right)\\ &= \frac{g\mu_B\beta E_0}{3}J(J+1).\end{aligned}$$

Now we calculate χ as

$$\chi=\frac{\partial\langle\mu_z\rangle}{\partial B}=(g\mu_B)^2\frac{\beta}{3}J(J+1)\sim\frac{1}{T},$$

which follows Curie's Law.

d) Bestimmen Sie $\langle\mu_z\rangle$ und χ im gemeinsamen Grenzfall $J\to\infty$ und $g\to 0$, wobei $g\cdot J$ konstant sein soll.

Solution

In the combined limit we obtain for $\langle\mu_z\rangle$

$$\langle\mu_z\rangle=g\mu_B J\left(\coth(\beta E_0 J)-\frac{1}{\beta E_0 J}\right),$$

where we used

$$\begin{aligned}g(J+1/2)&=gJ(1+\mathcal{O}(g))\\ \coth(\beta E_0/2)&=\frac{2}{\beta E_0}+\frac{\beta E_0}{6}+\mathcal{O}(g^2).\end{aligned}$$

And for χ we obtain

$$\chi=(g\mu_B J)^2\beta\left(\frac{1}{\beta E_0 J}-\frac{1}{\sinh^2(\beta E_0 J)}\right)\overset{B\to 0}{=}\frac{(g\mu_B J)^2\beta}{3}$$