Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 13 Abgabe: 13.02.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 17.02.2026

Aufgabe 1: Ideales Bose Gas in zwei Dimensionen

a) Geben Sie die großkanonische Zustandssumme $Z_G(T, V, \mu)$ für ein zweidimensionales Bose Gas an.

b) Bestimmen Sie die mittlere Anzahl der Teilchen pro Flächeneinheit als Funktion von μ und T. Hierbei können Sie für die Energie der einzelnen Bosonen

$$\epsilon_\lambda = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2 \left(n_x^2 + n_y^2\right)$$

verwenden.

c) Zeigen Sie, dass in diesem Beispiel keine Bose-Einstein-Kondensation auftritt.

Aufgabe 2: (*) N anharmonische Oszillatoren (5 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der klassischen Statistik die mittlere Energie und den Beitrag zur spezifischen Wärme im Grenzfall kleiner Temperaturen für ein System von N unabhängingen anharmonischen Oszillatoren mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega^2\vec{r}^{\,2}}{2} + \gamma\vec{r}^{\,4}, \quad \gamma > 0 \,,$$

wobei der letzte Term als kleine Störung aufgefasst werden kann.

Aufgabe 3: (*) Kanonische Verteilung für magnetische Spins (5 Punkte)

Ein magnetisches System habe Energieaustausch mit einem Wärmebad. Zusätzlich sei seine Magnetisierung an das Wärmebad gekoppelt, so dass die Mittelwerte von Energie, $\langle E\rangle$, und Magnetisierung, $\langle M\rangle$, des Systems vorgegeben sind. Es soll ein Ensemble mit N solchen Systemen betrachtet werden. E_r und M_s seien die mögliche Gesmatenergie bzw. Magnetisierung der einzelnen Systeme und $n_{r,s}$ ist die Zahl der Systeme in dem Ensemble, die Energie E_r und Magnetisierung M_s haben.

a) Geben Sie die drei Zwangsbedingungen an, die man zum Aufstellen der verallgemeinerten Entropie benötigt.

b) Zeigen Sie, dass die Besetzungswahrscheinlichkeit $n_{r,s}/N$ gegeben ist durch

$$\frac{n_{r,s}}{N} = Ce^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)}\,.$$

Benutzen Sie hierfür die Methode der Lagrangemultiplikatoren um die Zwangsbedingungen aus der ersten Teilaufgabe einzubinden. Im zu zeigenden Ergebnis sind γ und δ zwei der damit eingeführten Lagrangemultiplikatoren. Geben Sie die Konstante C an.

c) $\Omega(E, M)$ sei der mikrokanonische Entartungsgrad. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(E, M)$, das System in einem Zustand der Energie E und der Magnetisierung M zu finden?

d) Geben Sie die Bedingungsgleichungen für die wahrscheinlichste Energie ($\bar{E}$) bzw. Magnetisierung ($\bar{M}$) ($P(E, M)$ maximal!) an. Bestimmen Sie das Differential der inneren Energie $\mathrm{d}E = \mathrm{d}\langle E\rangle = \mathrm{d}\bar{E}$ für ein System mit Magnetisierung. Nutzen Sie nun die Beziehung zwischen der Entropie S und $\Omega(E, M)$ aus, um Ω zu eliminieren und so die Lagrange-Parameter γ und δ zu bestimmen.

e) Wie hängt in diesem Fall die freie Energie $F = E - TS - HM$ mit der kanonische Zustandssumme Z_K zusammen?
