

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 1

Besprechung: 04.11.2025

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator

Gehen Sie aus vom eindimensionalen harmonischen Oszillator als ungestörtem System:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

- a) Berechnen Sie Die Korrekturen zu den Energieniveaus in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie für die Störung

$$H_1 = \lambda_1 x.$$

Vergleichen Sie mit der exakten Lösung.

Solution

Using the relation

$$\langle m|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}),$$

where we used

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

the first-order corrections to the energy eigenvalue $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ are given by

$$E_n^{(1)} = \lambda_1 \langle n|x|n\rangle = 0.$$

The second-order corrections are obtained by

$$E_n^{(2)} = \lambda_1^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|x|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = -\frac{\lambda_1^2}{2m\omega^2}$$

Alternatively, the total Hamiltonian $H = H' + H_1$ can be written as

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 - \frac{\lambda_1^2}{2m\omega^2}, \quad \text{with} \quad y = x + \frac{\lambda_1}{m\omega^2},$$

so that the exact energy eigenvalues are given by

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda_1^2}{2m\omega^2},$$

which coincides with the results from the perturbation theory.

b) Wiederholen Sie Aufgabenteil a) für die Störung

$$H_2 = \lambda_2 x^2.$$

Solution

Similarly, we have

$$\langle m|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + (2n+1)\delta_{m,n} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} \right).$$

So that the energy corrections are given by

$$E_n^{(1)} = \lambda_2 \langle n|x^2|n\rangle = \hbar\omega \frac{\lambda_2}{m\omega^2} \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

and

$$E_n^{(2)} = \lambda_2^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|x^2|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = -\frac{1}{2} \hbar\omega \left(\frac{\lambda_2}{m\omega^2} \right)^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

The full Hamiltonian can be rewritten as

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \tilde{\omega}^2 x^2, \quad \text{with} \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 + \frac{2\lambda_2}{m}} = \omega \sqrt{1 + \frac{2\lambda_2}{m\omega^2}}.$$

The energy eigenvalues are then given by

$$E_n = \hbar\tilde{\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(1 + \frac{\lambda_2}{m\omega^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{m\omega^2} \right)^2 + \mathcal{O}(\lambda_2^3) \right) \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

and expanding it recovers the first- and second-order energy corrections.

c) Berechnen Sie die Korrektur zur Grundzustandsenergie in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie für die Störung

$$H_3 = \lambda_3 x^4.$$

Solution

Using the results from above we get

$$x^4 |0\rangle = x^2(x^2 |0\rangle) = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \left(3 |0\rangle + 6\sqrt{2} |2\rangle + 2\sqrt{6} |4\rangle \right),$$

and the energy corrections can be calculated as

$$E_0^{(1)} = \lambda_3 \langle 0|x^4|0\rangle = 3 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2,$$

and

$$E_0^{(2)} = \lambda_3^2 \sum_{m \neq 0} \frac{|\langle m|x^4|0\rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}} = -42 \frac{\lambda_3^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4$$

Aufgabe 2: Zwei-Niveau-System

Gegeben sei der folgende Hamiltonoperator, welcher ein Zwei-Niveau beschreibt:

$$H = H_0 + H',$$

wobei

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad E_1 \neq E_2$$

und

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie H' als Störung zu H_0 und berechnen Sie in niedrigster nicht verschwindender Ordnung Störungstheorie die Energieeigenwerte von H . Was passiert im entarteten Fall $E_1 = E_2$?

Solution

The energy corrections are given by,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= E_1 + \langle 1|H'|1\rangle + \frac{|\langle 1|H'|2\rangle|^2}{E_1 - E_2} = E_1 + \frac{V^2}{E_1 - E_2} \\ \tilde{E}_2 &= E_2 + \langle 2|H'|2\rangle + \frac{|\langle 1|H'|2\rangle|^2}{E_2 - E_1} = E_2 + \frac{V^2}{E_2 - E_1}, \end{aligned}$$

where the first non-vanishing contribution corresponds to the second order in perturbation theory.

In the degenerated case $E_1 = E_2 = E$, we have to find the eigenvalues of the following matrix to obtain the energy corrections:

$$\begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix},$$

which are given by $\lambda_{\pm} = \pm V$, so that the energy corrections in first order of perturbation theory are given by

$$\tilde{E}_{\pm} = E \pm V.$$

Aufgabe 3: Wasserstoffatom

Betrachten Sie ein Elektron gebunden im Potential eines Wasserstoffatoms, das durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird:

$$H = H_0 + \frac{e^2}{2m^2c^2} \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{r^3},$$

wobei H_0 gegeben ist durch

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

und der $\vec{L} \cdot \vec{S}$ -Term die Spin-Bahn Kopplung beschreibt.

Betrachten Sie den $\vec{L} \cdot \vec{S}$ -Term als Störung und berechnen Sie die Korrektur zur Eigenenergie in erster Ordnung Störungsrechnung. Verwenden Sie dazu die ungestörten Eigenfunktionen in der Basis, die durch $|j, m_j, l, s\rangle$ gegeben ist. Dabei sind $\hbar^2 j(j+1)$, $\hbar^2 l(l+1)$ und $\hbar^2 s(s+1)$ die Eigenwerte der Quadrate des Gesamtdrehimpuls, des Bahndrehimpuls und des Spins. $\hbar m_j$ ist der Eigenwert von J_z .

- a) Betrachten Sie zunächst nur den Winkelanteil der Störterms. In wieviele Niveaus spalten sich die Energien E_n für $n = 1, 2, 3$ auf?

Solution

The wavefunction of the hydrogen atom without spin-orbit coupling can be schematically written as $|n, l, m\rangle$ and we have the following relation $H_0 |n, l, m\rangle = E_n |n, l, m\rangle$, so that the eigen energies do not depend on l, m . Considering the eigen energy for a fixed value of n , we have $l = 0, 1, \dots, n-1$ with $-l \leq m \leq l$. So that in total the degeneracy of the eigen energy E_n is n^2 . Taking into account the spin of the electron, we write the wave functions as $|n, l, s, m, m_s\rangle$ with $s = 1/2$ and $m_s = \pm 1/2$, and the degeneracy increases to $2n^2$.

Introducing now the total angular momentum $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, the scalar product can be written as

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2).$$

In addition, we define new states $|n, j, l, s, m_j\rangle$ ($|l-s| \leq j \leq |l+s|$ and $-j \leq m_j \leq j$), which we decompose as $|n, l\rangle |j, l, s, m_j\rangle$, where $|n, l\rangle$ is the usual radial part of the eigen states of H_0 . The state $|j, l, s, m_j\rangle$ is obtained from the addition of the two angular momenta \vec{L} and \vec{S} and can be written as

$$|j, l, s, m_j\rangle = \sum_{m, m_s} \langle l, s, m, m_s | j, l, s, m_j \rangle |l, s, m, m_s\rangle,$$

where the coefficients are the standard Clebsch-Gordan coefficients. These new states are still eigen states of H_0 with $H_0 |n, j, l, s, m_j\rangle = E_n |n, j, l, s, m_j\rangle$, since the wave functions only depend on n and l . The degeneracy to the eigen energy E_n can be calculated as

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2} 2 \left(j + \frac{1}{2} \right) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=l}^{l+1} 2k = 2n^2,$$

where $2 \left(j + \frac{1}{2} \right)$ accounts for the degeneracy of m_j .

From the scalar product we know that energy corrections will depend j, l, s and not on m_j . Thus, it is expected that the energy E_n will split into $2(n-1)$ energy levels $E_{n,j,l,s}$, where this number is obtained from the upper sum by setting the degeneracy factor to 1 and by starting the first sum with 1 since for $l=0$ the term $\vec{L} \cdot \vec{S}$ directly vanishes and leads to the normal E_n .

- b) Betrachten Sie nun auch die r -Abhängigkeit des Störterms. Wie lautet die Korrektur erster Ordnung zu E_n aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung?

Bei der Berechnung des Matrixelements bietet es sich an, eine Unterscheidung zwischen $l=0$ und $l \neq 0$ vorzunehmen.

Für den Radialanteil benötigen Sie das Matrixelement $\langle n, l | \frac{1}{r^3} | n, l \rangle$. Falls es Ihnen nicht

gelingt eine geschlossene Formel für beliebiges n herzuleiten, ist es ausreichend, die Fälle für $n \leq 3$ explizit zu betrachten.

Solution

In order to obtain the new energy levels to first order in perturbation theory we have to diagonalize the matrix

$$\langle n, l, s, m, m_s | V | n, l', s, m', m'_s \rangle,$$

where V is the perturbation term. Choosing the new basis from a), this matrix is directly diagonal:

$$\langle n, j, l, s, m_j | V | n, j', l', s, m'_j \rangle = \Delta E_{j,l,s} \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

with

$$\Delta E_{j,l,s} = \frac{e^2 \hbar^2}{4m^2 c^2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \langle n, l | \frac{1}{r^3} | n, l \rangle.$$

The remaining scalar product is given by

$$\langle n, l | \frac{1}{r^3} | n, l \rangle = \int_0^\infty dr \frac{u_{n,l}(r)^2}{r^3}$$

with

$$\frac{u_{n,l}(r)}{r} = \frac{1}{\sqrt{a_B^3}} \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} \left(\frac{2}{n a_B}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{n a_B}\right) \exp\left(-\frac{r}{n a_B}\right),$$

and

$$L_{n-l-1}^{2l+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-l-1} \binom{n+l}{n-l-1-k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \quad \text{and} \quad a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}.$$

The exact result is given by

$$\langle n, l | \frac{1}{r^3} | n, l \rangle = \frac{1}{a_B^3 n^3} \frac{1}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \quad (l \neq 0),$$

so that the energy corrections are obtained with

$$\Delta E_{j,l,s} = \frac{e^2 \hbar^2}{4m^2 c^2} \frac{(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))}{a_B^3 n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \quad (l \neq 0).$$

Solution

Alternatively, it is possible to consider specific values of n . With $n = 3$ we have to consider the following wave function:

$$\begin{aligned}\frac{u_{2,1}(r)}{r} &= \frac{r e^{-\frac{r}{2a_B}}}{2\sqrt{6}a_B^{5/2}}, \\ \frac{u_{3,1}(r)}{r} &= \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}r e^{-\frac{r}{3a_B}}(6a_B - r)}{81a_B^{7/2}}, \\ \frac{u_{3,2}(r)}{r} &= \frac{2\sqrt{\frac{2}{15}}r^2 e^{-\frac{r}{3a_B}}}{81a_B^{7/2}}.\end{aligned}$$

The corresponding integrals then lead to

$$\begin{aligned}\langle 2, 1 | \frac{1}{r^3} | 2, 1 \rangle &= \frac{1}{24a_B^3}, \\ \langle 3, 1 | \frac{1}{r^3} | 3, 1 \rangle &= \frac{1}{81a_B^3}, \\ \langle 3, 2 | \frac{1}{r^3} | 3, 2 \rangle &= \frac{1}{405a_B^3}.\end{aligned}$$

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 2

Abgabe: 07.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 11.11.2025

Aufgabe 1: (*) Zerfall eines Tritiumkerns (4 Punkte)

Ein Tritiumkern (${}^3\text{H}$) verwandelt sich durch β -Zerfall in einem Heliumkern (${}^3\text{He}$). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, das sich im Grundzustand des Tritiumatoms befand, im $2s$ -Zustand des Heliumatoms gefunden wird.

Solution

The decay will be described in the "Sudden approximation". The ground state of the tritium is $|\Psi_1\rangle = |1S_{3H}\rangle$ and the $2s$ state of the Helium is $|\Psi_2\rangle = |2S_{3He}\rangle$. We can write the wave function as a radial part and an angular part. The radial part is given for arbitrary Z (see Schwabl, Quantenmechanik, page 132) by

$$R_{10}(r) = 2 * \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0},$$
$$R_{20}(r) = 2 * \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/(2a_0)}.$$

Therefore, we have for the tritium

$$\langle x|\Psi_1\rangle = R_{10}(r)Y_{00}(\Theta, \phi),$$

and for the Helium

$$\langle x|\Psi_2\rangle = R_{20}(r)Y_{00}(\Theta, \phi).$$

The transition probability is then obtained by

$$P_{\Psi_1 \rightarrow \Psi_2} = |\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle|^2,$$

with

$$\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle = \int_0^\infty dr r^2 \int d\Omega \frac{1}{4\pi} \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) = -\frac{1}{2},$$

which then leads to

$$P_{\Psi_1 \rightarrow \Psi_2} = |\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle|^2 = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 2: (*) Magnetische Resonanz (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Betrachten Sie ein Spin-1/2-Teilchen in einem Magnetfeld mit konstanter Komponente in z -Richtung und einer mit Frequenz ω in der xy -Ebene rotierenden Komponente. Der Hamilton-Operator für dieses System lautet:

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0 + V(t), \\ H_0 &= \omega_0 S_z, \\ V(t) &= \omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y, \end{aligned}$$

wobei S_i mit $i = x, y, z$ die Komponenten des Spin-Operators bezeichnet.

- a) Bestimmen Sie den Hamilton-Operator $H_I(t)$, der die Dynamik im Wechselwirkungsbild charakterisiert.

Solution

$$H_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$$

We can write V as

$$V(t) = \omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y = \frac{\omega_1 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix},$$

In addition, we can simplify the exponential function as

$$e^{iH_0 t/\hbar} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{iH_0 t}{\hbar} \right)^n = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega_0 t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} \end{pmatrix},$$

where we have used $\sigma_z^2 = \mathbb{I}$. Finally, $H_I(t)$ can be obtained by matrix multiplication

$$H_I(t) = \frac{\omega_1 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\omega_0 - \omega)t} \\ e^{-i(\omega_0 - \omega)t} & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Bestimmen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle \vec{S} \rangle(t)$ für den Fall $\omega = \omega_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand von H_0 . Berechnen Sie dafür zuerst die Wellenfunktion $|\psi_I(t)\rangle$ im Wechselwirkungsbild.

Solution

We write the expectation value $\langle \vec{S} \rangle(t)$ as

$$\langle \vec{S} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \vec{S} | \psi(t) \rangle = \langle \psi_I(t) | \vec{S}_I(t) | \psi_I(t) \rangle,$$

where $\vec{S}_I(t)$ is given by

$$\vec{S}_I(t) = e^{iH_0t/\hbar} \vec{S} e^{-iH_0t/\hbar},$$

and the wave function in the interaction picture is obtained from the differential equation

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = H_I(t) |\psi_I(t)\rangle.$$

We write the wave function as

$$|\psi_I(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix},$$

so that we get the following differential equations for $\omega = \omega_0$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_+(t) &= \frac{\omega_1 \hbar}{2} c_-(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_-(t) &= \frac{\omega_1 \hbar}{2} c_+(t). \end{aligned}$$

Applying $i \frac{d}{dt}$ on the first equation and inserting the second equation into the first one (and vice-versa) leads to

$$-\frac{d^2}{dt^2} c_{\pm}(t) = \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 c_{\pm}(t).$$

By specifying the boundary condition as $c_+(0) = 0$ and $c_-(0) = 1$, the solution is given by

$$c_+(t) = -i \sin\left(\frac{\omega_1}{2}t\right) \quad \text{and} \quad c_-(t) = \cos\left(\frac{\omega_1}{2}t\right).$$

The wave function in the Schrödinger picture can then be obtained by

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0t/\hbar} |\psi_I(t)\rangle.$$

The expectation values are then given by

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle(t) &= \langle \psi(t) | S_x | \psi(t) \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_1 t) \\ \langle S_y \rangle(t) &= \langle \psi(t) | S_y | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_1 t) \\ \langle S_z \rangle(t) &= \langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle = -\frac{\hbar}{2} \cos(\omega_1 t) \end{aligned}$$

c) Für die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung erweist es sich als vorteilhaft, eine

andere Aufteilung des Hamilton-Operators zu wählen:

$$\begin{aligned} H(t) &= H'_0 + V'(t), \\ H'_0 &= \omega S_z, \\ V'(t) &= (\omega_0 - \omega) S_z + V(t). \end{aligned}$$

Im Wechselwirkungsbild lautet dann der Hamilton-Operator

$$V'_I(t) = e^{iH'_0 t/\hbar} V'(t) e^{-iH'_0 t/\hbar}.$$

Bestimmen Sie nun den Erwartungswert $\langle S_z \rangle(t)$ für beliebiges ω , wobei sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ wieder im Grundzustand von H_0 befindet.

Solution

The solution is obtained in a similar way as in b). The Hamiltonian in the interaction picture is obtained by

$$H_I(t) = e^{iH'_0 t/\hbar} V'(t) e^{-iH'_0 t/\hbar} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} (\omega_0 - \omega) & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_+(t) &= \frac{(\omega_0 - \omega)\hbar}{2} c_+(t) + \frac{\omega_1 \hbar}{2} c_-(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_-(t) &= -\frac{(\omega_0 - \omega)\hbar}{2} c_-(t) + \frac{\omega_1 \hbar}{2} c_+(t). \end{aligned}$$

Now take second derivative in t on the first diff. eq. and substitute $c'_+(t)$ and $c'_-(t)$ from above, we have the second-order diff. eq.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} c_+(t) + \Omega^2 c_+(t) = 0, \quad \text{with } \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}.$$

Given the boundary condition $c_+(0) = 0$ and $c_-(0) = 1$, we can have the following solution

$$\begin{aligned} c_+(t) &= -i \frac{\omega_1}{2\Omega} \sin(\Omega t), \\ c_-(t) &= i \frac{\omega_0 - \omega}{2\Omega} \sin(\Omega t) + \cos(\Omega t). \end{aligned}$$

The wave function in the Schrödinger picture is then given by

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |\psi_I(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\omega t}{2}} c_+(t) \\ e^{\frac{i\omega t}{2}} c_-(t) \end{pmatrix},$$

and the scalar product gives

$$\langle S_z \rangle(t) = -\frac{\hbar}{2} \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2 \cos(2\Omega t)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}$$

Aufgabe 3: Freies Elektron im elektrischen Feld

Wir betrachten ein Elektron in einem zeitlich konstanten elektrischen Feld $\vec{\varepsilon} = -\varepsilon\hat{x}$ in $(-x)$ -Richtung, wobei $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}|$.

- Das Elektron soll sich in positive x -Richtung bewegen. Geben Sie den Ausdruck für die Kraft auf das Elektron an. Wie sehen das zugehörige Potential und der Hamiltonoperator aus?
- Zuerst soll das stationäre Problem gelöst werden. Zeigen Sie, dass sich mit der folgenden Variablentransformation

$$y = \frac{1}{l_{e\varepsilon}}(x + x_E) \quad \text{mit} \quad x_E = \frac{E}{e\varepsilon} \quad \text{und} \quad l_{e\varepsilon} = \left(\frac{2me\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

das Eigenwertproblem $H\Psi = E\Psi$ zu

$$(\partial_y^2 + y)\Psi(y) = 0$$

vereinfacht.

Die Lösung für diese Differentialgleichung ist

$$\Psi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi e\varepsilon l_{e\varepsilon}}} \text{Ai}\left(-\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)$$

mit der Airy Funktion $\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\vartheta \cos\left(\frac{\vartheta^3}{3} - \vartheta x\right)$.

Eine zweite Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, ist, das konstante elektrische Feld durch das Vektorpotential \vec{A} und das Skalarpotential φ auszudrücken. Wir wählen $\varphi = 0$, wodurch sich das Vektorpotential über den Zusammenhang $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A}$ ergibt.

- Geben Sie die zeitabhängige Schrödinger Gleichung für ein geladenes Teilchen mit Ladung $q = -e$ in einem elektromagnetischen Feld an. Setzen Sie dann $\varphi = 0$, bestimmen Sie das Vektorpotential über $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A}$ und lösen Sie die Schrödinger-Gleichung.

Hinweis: Benutzen Sie für die Wellenfunktion den Ansatz $\Psi_p(x, t) = X_p(x)\varphi_p(t)$.

Nun wollen wir die Beziehung zwischen den beiden Lösungen, $\Psi_E(x, t) = \Psi_E(x) \exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$ (stationäre Lösung mit Zeitentwicklungsoperator) und $\Psi_p(x, t)$ (nicht-stationäre Lösung), finden.

- Finden Sie die Eichtransformation, die die Hamiltonoperatoren der beiden Teilaufgaben ineinander überführt. Geben Sie die Ausdrücke für die transformierten Felder und Wellenfunktionen, A' , φ' and $\Psi'_p(x, t)$, an.
- Die beiden Lösungen $\Psi'_p(x, t)$ und $\Psi_E(x, t)$ sind beides Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung des gleichen Hamiltonoperators, sie bilden also jeweils einen vollständigen, orthogonales Satz von Basisvektoren und können dementsprechend ineinander übergeführt werden. Zeigen Sie, dass für den Fall $t = 0$ folgende Beziehung gilt:

$$\Psi_E(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} a_E(p) \Psi'_p(x, 0),$$

$$a_E(p) = \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \exp\left[-\frac{ip}{\hbar e\varepsilon} \left(\frac{p^2}{6m} - E\right)\right].$$

Solution

1. The force on the electron is $F = e\varepsilon = -\partial_x V$. Our Potential is therefore $V(x) = -e\varepsilon x$ and the Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - e\varepsilon x = \frac{p^2}{2m} - e\varepsilon x$$

2. We start with the eigenvalue problem

$$\begin{aligned} H\Psi_E &= E\Psi_E \\ \implies \left[\partial_x^2 + \frac{1}{l_{e\varepsilon}^2}(x + x_E) \right] \Psi_E &= 0 \end{aligned}$$

Using the substitution given above we can calculate

$$\partial_x^2 = \frac{1}{l_{e\varepsilon}^2}\partial_y^2$$

and our equation simplifies to

$$(\partial_y^2 + y)\Psi_E = 0.$$

3. The Hamiltonian is

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\varphi = \frac{(\vec{p} + e\varepsilon t\hat{x})^2}{2m} = H(t)$$

with $q = -e$, $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A} \implies \vec{A} = -\vec{\varepsilon}t$ and $\varphi = 0$. We solve the time dependent Schrödinger equation $i\hbar\partial_t\Psi(x, t) = H\Psi(x, t)$ with the following ansatz

$$\Psi_p(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}px}\varphi_p(t).$$

This leads to the following differential equation for $\varphi_p(t)$

$$i\hbar\partial_t\varphi_p(t) = \frac{(p + e\varepsilon t)^2}{2m}\varphi_p(t)$$

with the solution $\varphi_p(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \frac{(p + e\varepsilon t')^2}{2m}\right]$ and therefore our total solution are the so called Houghon functions

$$\Psi(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \int_0^t dt' \frac{(p + e\varepsilon t')^2}{2m}\right)\right].$$

Solution

4. Our Hamiltonian was $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2$ with $\vec{A} = -\vec{e}t$ and $\varphi = 0$. We want our $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi = 0$ which leads to

$$\nabla\chi = \vec{e}t = -\varepsilon t\hat{x} \implies \chi = -\varepsilon tx$$

We can define now our gauge transformed scalar field and there from the potential of our system

$$\varphi' = \varphi - \partial_t\chi = \varepsilon x \implies V(x) = q\varphi'(x) = -e\varepsilon x.$$

The wave function changes to

$$\Psi'_p = \Psi_p \exp\left[\frac{iq}{\hbar}\chi\right] = \Psi_p \exp\left[\frac{ie}{\hbar}\varepsilon tx\right]$$

and is the solution to the Hamiltonian $H' = \frac{p^2}{2m} - e\varepsilon x$, which is exactly the same as the one from part a).

5. We start with $\Psi_E(x, 0)$

$$\begin{aligned} \Psi_E(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi e\varepsilon}} \frac{1}{l_{e\varepsilon}} \text{Ai}\left(-\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi e\varepsilon}} \frac{1}{l_{e\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\nu \cos\left[\frac{\nu^3}{3} - \nu\left(\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \frac{1}{\pi l_{e\varepsilon}} \int_0^\infty d\nu \frac{1}{2} \left[e^{i\left[\frac{\nu^3}{3} - \nu\left(\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)\right]} + e^{-i\left[\frac{\nu^3}{3} - \nu\left(\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}}\right)\right]} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \frac{1}{2\pi l_{e\varepsilon}} \int_{-\infty}^\infty d\nu e^{i\left[\frac{\nu^3}{3} - \frac{\nu E}{e\varepsilon l_{e\varepsilon}}\right]} e^{-\frac{i\nu x}{l_{e\varepsilon}}}. \end{aligned}$$

We now substitute $p = \frac{\hbar\nu}{l_{e\varepsilon}}$ which leads to

$$\begin{aligned} \Psi_E(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^\infty dp e^{i\left[\frac{(l_{e\varepsilon}p)^3}{3\hbar^3} - \frac{pE}{\hbar e\varepsilon}\right]} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-\frac{ip}{\hbar e\varepsilon}\left[\frac{p^2}{6m} - E\right]} e^{\frac{i}{\hbar}px} \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} e^{-\frac{ip}{\hbar e\varepsilon}\left[\frac{p^2}{6m} - E\right]} \Psi'_p(x, 0) \end{aligned}$$

In guter Näherung kann die Lösung des Wasserstoffatoms verwendet werden:

$$\psi(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \checkmark$$

- Grundzustand des Tritiumkerns (^3H) mit $n=1, l=0 \rightarrow m=0$

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} e^{-\frac{2Zr}{na_0}} \overset{\text{Bohrscher Atomradius}}{\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)$$

$$\rightarrow R_{10} = \sqrt{\frac{4Z^3}{a_0^3}} e^{-\frac{Zr}{a_0}} \quad \checkmark, \quad Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad \checkmark$$

Tritium hat $Z=1$:

$$\rightarrow \psi_{100}(r) = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_0}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad \checkmark$$

- 2s-Zustand des Heliumatoms mit $n=2, l=m=0$

$$R_{20}(r) = \sqrt{\frac{Z^3}{8a_0^3}} \left(-\frac{Zr}{a_0} + 2\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}}$$

Helium hat $Z=2$:

$$\begin{aligned} \rightarrow \psi_{200} &= \sqrt{\frac{2^3}{8a_0^3}} \left(-\frac{2r}{a_0} + 2\right) e^{-\frac{2r}{2a_0}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{a_0}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\langle \psi_{200} | \psi_{100} \rangle = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi_{200}^* \psi_{100} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{a_0}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_0}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{a_0^3 \pi} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}} \underbrace{r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr}_{4\pi}$$

Da wir keine Winkelabhängigkeit haben, hättest du auch direkt schon 4π schreiben können ☺

$$= \frac{2}{a_0^3} \underbrace{[-\cos\theta]_0^\pi}_{=1-(-1)=2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 dr \quad \left(\int f'g = (fg) - \int fg' \right)$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} \left(\int_0^\infty dr r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} - \int_0^\infty dr \frac{r^3}{a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right) \quad f' = -\frac{2}{a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

$$\text{P.I.} = \frac{4}{a_0^3} \left(\left[-\frac{a_0}{2} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 2r dr + \left[-\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \frac{r^3}{3} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{a_0}{2} \frac{3r^2}{3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right)$$

NR:

$$\left[r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{e^{\frac{2r}{a_0}}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2ra_0}{2e^{\frac{2r}{a_0}}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{2e^{\frac{2r}{a_0}}} = 0$$

$$\left[r^3 e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^3}{e^{\frac{2r}{a_0}}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{3r^2 a_0}{2e^{\frac{2r}{a_0}}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{3ra_0^2}{2e^{\frac{2r}{a_0}}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{3a_0^3}{4e^{\frac{2r}{a_0}}} = 0$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \left(\int_0^\infty a_0 e^{-\frac{2r}{a_0}} r dr + \int_0^\infty \frac{3}{2} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \right)$$

$$\text{P.I.} = \frac{4}{a_0^3} \left(\left[-\frac{a_0^2}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} r \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{a_0^2}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} dr + \left[-\frac{3r^2 a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{3a_0 r}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right)$$

$$\text{P.I.} = \frac{4}{a_0^3} \left(\left[-\frac{a_0^3}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty + \left[-\frac{3a_0^2}{4} r e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{3a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} dr \right)$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \left(\frac{a_0^3}{4} + \left[\frac{3a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty \right) = \frac{4}{a_0^3} \left(\frac{a_0^3}{4} - \frac{3a_0^3}{8} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow P_{\psi_{100} \rightarrow \psi_{200}} = |\langle \psi_{200} | \psi_{100} \rangle|^2 = \frac{1}{4} \quad \checkmark \quad (4/4)$$

$$\textcircled{2} \quad H(t) = H_0 + V(t) = \omega_0 S_z + \omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Schrödinger-Gleichung im Wechselwirkungsbild (VL): $i\hbar \partial_t |\psi_I(t)\rangle = V_I(t) |\psi_I(t)\rangle$

$\hookrightarrow V_I$ bestimmt die Dynamik im WWB

$$\hookrightarrow H_I(t) = V_I(t) = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} V_S(t) e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} \quad \checkmark$$

$$= e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} (\omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y) e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}$$

$$= e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} \left(\frac{\hbar \omega_1}{2} \cos(\omega t) \sigma_x + \frac{\hbar \omega_1}{2} \sin(\omega t) \sigma_y \right) e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}$$

NR:

$$V_S(t) = \frac{\hbar \omega_1}{2} \cos(\omega t) \sigma_x + \frac{\hbar \omega_1}{2} \sin(\omega t) \sigma_y$$

$$= \frac{\hbar}{2} \omega_1 \begin{pmatrix} 0 & \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} = e^{\frac{i\omega_0}{2} \sigma_z} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + i \sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + i \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) - i \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0}{2} t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0}{2} t} \end{pmatrix}$$

mit $e^{i\sigma_z \omega t} = \mathbb{1} \cos(\omega t) + \frac{i\sigma_z \omega}{\omega} \sin(\omega t)$ aus Theo D. \rightarrow

$$\hookrightarrow H_I(t) = \frac{\hbar}{2} \omega_1 \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0}{2} t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0}{2} t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega_0}{2} t} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega_0}{2} t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \omega_1 \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0}{2} t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0}{2} t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\frac{\omega_0}{2} - \omega)t} \\ e^{-i(\frac{\omega_0}{2} - \omega)t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\omega_0 - \omega)t} \\ e^{-i(\omega_0 - \omega)t} & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad (2/2)$$

$$b) \quad \omega = \omega_0: \quad H_I(t) = \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar \omega_1}{2} \sigma_x$$

$$i\hbar \partial_t |\psi_I(t)\rangle = H_I |\psi_I(t)\rangle = \frac{\hbar \omega_1}{2} \sigma_x |\psi_I(t)\rangle$$

$$\partial_t |\psi_I(t)\rangle = -i \frac{\hbar \omega_1}{2} \sigma_x |\psi_I(t)\rangle$$

$$\hookrightarrow \text{Ansatz: } |\psi_I(t)\rangle = e^{-i \frac{\hbar \omega_1}{2} \sigma_x t} (a_1 |\uparrow\rangle + a_2 |\downarrow\rangle) + c \quad \text{mit } |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_0 |\psi(0)\rangle = E_0 |\psi(0)\rangle \quad (H_0 = H_{0I})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar \omega_1}{2} \sigma_x |\psi(0)\rangle = E_0 |\psi(0)\rangle$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\pm} = \pm \frac{\hbar \omega_1}{2}$$

Randbed.: Bei $t=0$ befindet sich das System im Grundzustand mit

$$H_0 |\psi_-(0)\rangle = E_- |\psi_-(0)\rangle \quad \text{mit } |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle = |\psi_I(0)\rangle \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1, c = 0$$

$$\Rightarrow |\psi_I(t)\rangle = e^{-i \frac{\omega_1}{2} t \sigma_x} |\downarrow\rangle = (\mathbb{1} \cos(\frac{\omega_1}{2} t) - i \sigma_x \sin(\frac{\omega_1}{2} t)) |\downarrow\rangle$$

(wobei wieder $e^{i\vec{\sigma}\vec{\omega}t} = \mathbb{1} \cos(|\vec{\omega}|t) + i \frac{\vec{\sigma}\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \sin(|\vec{\omega}|t)$ verwendet wurde)

$$= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega_1}{2} t) & -i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) \\ -i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) & \cos(\frac{\omega_1}{2} t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) \\ \cos(\frac{\omega_1}{2} t) \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\langle S(t) \rangle = \langle \psi_I(t) | S_I | \psi_I(t) \rangle = \langle \psi_S(t) | S_S | \psi_S(t) \rangle \quad (\text{Physik unabh. von Bild}) \quad \checkmark$$

→ Entweder S ins WWB oder Zustände ins SB transformieren:

$$\begin{aligned}
 |\psi_S(t)\rangle &= e^{-i\frac{\omega_0}{2}t} \quad |\psi_I(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_0}{2}S_z t} \begin{pmatrix} -i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) \\ \cos(\frac{\omega_1}{2}t) \end{pmatrix} \\
 &= \left(\mathbb{1}\cos(\frac{\omega_0 t}{2}) - i\sigma_z \sin(\frac{\omega_0 t}{2}) \right) \begin{pmatrix} -i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) \\ \cos(\frac{\omega_1}{2}t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega_0 t}{2}) - i\sin(\frac{\omega_0 t}{2}) & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\omega_0 t}{2}) + i\sin(\frac{\omega_0 t}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) \\ \cos(\frac{\omega_1}{2}t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) \\ \cos(\frac{\omega_1}{2}t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2}t) e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} \end{pmatrix} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle S_x(t) \rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2}t) e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2}t) e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2}t) e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega_1}{2}t) e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} \\ -i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i\sin(\frac{\omega_1}{2}t) e^{i\omega_0 t} & \cos(\frac{\omega_1}{2}t) \\ -i\cos(\frac{\omega_1}{2}t) e^{-i\omega_0 t} & \sin(\frac{\omega_1}{2}t) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left(i\sin(\frac{\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_1}{2}t) (\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)) \right. \\
 &\quad \left. - i\sin(\frac{\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_1}{2}t) (\cos(\omega_0 t) - i\sin(\omega_0 t)) \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2} (-2\sin(\frac{\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_1}{2}t)\sin(\omega_0 t))
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{\hbar}{2} \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_0 t) \text{ mit } \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad \checkmark$$

$$\langle S_y(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t/2} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t/2} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t/2} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t/2} \\ \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\sin(\frac{\omega_1}{2} t) \cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t} + \cos(\frac{\omega_1}{2} t) \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\sin(\frac{\omega_1}{2} t) \cos(\frac{\omega_1}{2} t) (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) \right.$$

$$\left. + \cos(\frac{\omega_1}{2} t) \sin(\frac{\omega_1}{2} t) (\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)) \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2} 2 \sin(\frac{\omega_1}{2} t) \cos(\frac{\omega_1}{2} t) \cos(\omega_0 t)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_0 t) \quad \checkmark$$

$$\langle S_z(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t/2} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t/2} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t/2} \\ \cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \sin(\frac{\omega_1}{2} t) e^{-i\omega_0 t/2} \\ -\cos(\frac{\omega_1}{2} t) e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\sin^2(\frac{\omega_1}{2} t) - \cos^2(\frac{\omega_1}{2} t) \right)$$

$$= -\frac{\hbar}{2} \cos(\omega_1 t) \text{ mit } \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow \langle S(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\omega_1 t) \sin(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_0 t) \\ -\cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad (212)$$

c) $H(t) = H_0 + V(t)$ mit $H_0 = \omega S_z$

$$V(t) = (\omega_0 - \omega) S_z + V(t)$$

$$= (\omega_0 - \omega) S_z + \omega_1 (\cos(\omega t) S_x + \sin(\omega t) S_y)$$

$$a) = \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} + (\omega_0 - \omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix}$$

$$e^{iH_0 t / \hbar} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t / 2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t / 2} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow V_I(t) = e^{iH_0 t / \hbar} V(t) e^{-iH_0 t / \hbar}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\omega t / 2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t / 2} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t / 2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t / 2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t / 2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t / 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\omega_0 - \omega) e^{-i\omega t / 2} & \omega_1 e^{-i\omega t / 2} \\ \omega_1 e^{i\omega t / 2} & -(\omega_0 - \omega) e^{i\omega t / 2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} (\omega_0 - \omega) & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} \quad \checkmark = \frac{\hbar}{2} (\omega_1 \sigma_x + (\omega_0 - \omega) \sigma_z)$$

$$\rightarrow i\hbar \partial_t |\psi_I(t)\rangle = H_I(t) |\psi_I(t)\rangle = \frac{\hbar}{2} (\omega_1 \sigma_x + (\omega_0 - \omega) \sigma_z) |\psi_I(t)\rangle$$

Um später Probleme mit der Matrixreihenfolge zu vermeiden, kann nicht der Ansatz aus b) gewählt werden. Stattdessen leite ich die S.G. wahl der Zeit ab, um eine DGL 2. Ordnung zu erhalten:

$$\partial_t i\hbar \partial_t |\psi_I(t)\rangle = \partial_t H_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad \left| \quad \partial_t |\psi_I(t)\rangle = \frac{1}{2i} (\omega_1 \sigma_x + (\omega_0 - \omega) \sigma_z) |\psi_I(t)\rangle \right.$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow i\hbar \partial_t^2 |\psi_I(t)\rangle &= \frac{\hbar}{2} (\omega_1 \sigma_x + (\omega_0 - \omega) \sigma_z) \partial_t |\psi_I(t)\rangle \\ &= \frac{\hbar}{4i} \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} |\psi_I(t)\rangle \\ &= \frac{\hbar}{4i} \begin{pmatrix} (\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2 & 0 \\ 0 & (\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4i} \mathbb{1} (\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 |\psi_I(t)\rangle = -\frac{1}{4} ((\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2) |\psi_I(t)\rangle$$

$$\hookrightarrow \text{Ansatz: } |\psi_I(t)\rangle = \sin(\tilde{\omega}t) |A\rangle + \cos(\tilde{\omega}t) |B\rangle$$

$$\text{mit } \tilde{\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} \quad \checkmark$$

$$\text{Es ist wieder } |\psi_I(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |B\rangle$$

$$\hookrightarrow \partial_t |\psi_I(t)\rangle = \tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega}t) |A\rangle - \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t) |B\rangle$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \partial_t |\psi_I(t)\rangle|_{t=0} &= \tilde{\omega} |A\rangle = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (\omega_0 - \omega) & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} |\psi_I(t)\rangle|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (\omega_0 - \omega) & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow |A\rangle = \frac{1}{2i\tilde{\omega}} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow |\psi_I(t)\rangle = \frac{-i \sin(\tilde{\omega}t)}{2\tilde{\omega}} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix} + \cos(\tilde{\omega}t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-i \sin(\tilde{\omega}t) \omega_1}{2\tilde{\omega}} \\ \frac{-i \sin(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)}{2\tilde{\omega}} + \cos(\tilde{\omega}t) \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\hookrightarrow |\psi_S(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t} |\psi_I(t)\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-i \sin(\tilde{\omega}t) \omega_1}{2\tilde{\omega}} \\ \frac{-i \sin(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)}{2\tilde{\omega}} + \cos(\tilde{\omega}t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i e^{-i\omega t/2} \frac{\sin(\tilde{\omega}t) \omega_1}{2\tilde{\omega}} \\ e^{i\omega t/2} \left(\frac{-i \sin(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)}{2\tilde{\omega}} + \cos(\tilde{\omega}t) \right) \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \langle \psi_S(t) | S_z | \psi_S(t) \rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i e^{i\omega t/2} \frac{\sin(\tilde{\omega}t) \omega_1}{2\tilde{\omega}} \\ e^{-i\omega t/2} \left(\frac{i \sin(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)}{2\tilde{\omega}} + \cos(\tilde{\omega}t) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i e^{-i\omega t/2} \frac{\sin(\tilde{\omega}t) \omega_1}{2\tilde{\omega}} \\ e^{i\omega t/2} \left(\frac{-i \sin(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)}{2\tilde{\omega}} + \cos(\tilde{\omega}t) \right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i e^{i\omega t/2} \frac{\sin(\tilde{\omega}t) \omega_1}{2\tilde{\omega}} \\ e^{-i\omega t/2} \left(\frac{i \sin(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)}{2\tilde{\omega}} + \cos(\tilde{\omega}t) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i e^{-i\omega t/2} \frac{\sin(\tilde{\omega}t) \omega_1}{2\tilde{\omega}} \\ e^{i\omega t/2} \left(\frac{-i \sin(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)}{2\tilde{\omega}} + \cos(\tilde{\omega}t) \right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{\sin^2(\tilde{\omega}t) \omega_1^2}{4\tilde{\omega}^2} - \left(\frac{\sin^2(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)^2}{2\tilde{\omega}} + \cos^2(\tilde{\omega}t) \right) \left(\frac{-i \sin(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)}{2\tilde{\omega}} + \cos(\tilde{\omega}t) \right) \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{\sin^2(\tilde{\omega}t) \omega_1^2}{4\tilde{\omega}^2} - \left(\frac{\sin^2(\tilde{\omega}t) (\omega - \omega_0)^2}{4\tilde{\omega}^2} + \cos^2(\tilde{\omega}t) \right) \right]$$

$$= -\frac{\hbar}{2} \left[\cos^2(\tilde{\omega}t) + \frac{\sin^2(\tilde{\omega}t)}{4\tilde{\omega}^2} ((\omega - \omega_0)^2 - \omega_1^2) \right] //$$

Müsste passen, vergleiche aber nochmal mit Musterlösung ☺

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 3

Abgabe: 14.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 18.11.2025

Aufgabe 1: (*) Harmonischer Oszillator (3 + 2 = 5 Punkte)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit der Störung

$$V(t) = -f(t)x.$$

a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) = \lambda\sqrt{2\hbar m\omega^3}\Theta(t)\Theta(\tau - t),$$

mit $\tau > 0$. Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit $P_{0 \rightarrow 1}$, dass ein System im Grundzustand zur Zeit $t < 0$ nach der Zeit $t > \tau$ im ersten angeregten Zustand zu finden ist. Wie lautet die Abhängigkeit von τ im Grenzfall $\omega\tau \ll 1$?

Solution

The potential can be rewritten as

$$V(t) = -x\lambda\sqrt{2m\hbar\omega^3}\Theta(t)\Theta(\tau - t) = -\lambda\hbar\omega\Theta(t)\Theta(\tau - t)(a + a^\dagger),$$

then the probability $P_{0 \rightarrow 1}$ is given by

$$P_{0 \rightarrow 1} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{\infty} dt e^{i(E_1 - E_0)t/\hbar} \langle 1|V(t)|0 \rangle \right|^2 = 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

In the limit $\omega\tau \ll 1$ we get

$$P_{0 \rightarrow 1} = \lambda^2\omega^2\tau^2.$$

b) Betrachten Sie nun eine gaußförmige Störung mit

$$f(t) = \lambda\sqrt{2\hbar m\omega^3} \frac{e^{-t^2/\tau^2}}{\sqrt{\pi}},$$

und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{0 \rightarrow 1}$ für $t \rightarrow \infty$, wobei angenommen wird, dass der Oszillator sich für $t \rightarrow -\infty$ im Grundzustand befindet. Zeigen Sie, dass im Grenzfall $\omega\tau \ll 1$ sich die gleiche Wahrscheinlichkeit wie in der vorherigen Teilaufgabe ergibt. Bestimmen Sie $P_{0 \rightarrow 1}$ für $\omega\tau \gg 1$.

Solution

Following the last part, we have

$$P_{0 \rightarrow 1} = \frac{\lambda^2 \omega^2}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - t^2/\tau^2} \right|^2 = \lambda^2 \omega^2 \tau^2 e^{-\omega^2 \tau^2 / 2},$$

where the integral can be obtained from $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ and the variable transformation $y = (t/\tau - i\omega\tau/2)$. In the limit $\omega\tau \ll 1$ we obtain as above

$$P_{0 \rightarrow 1} = \lambda^2 \omega^2 \tau^2,$$

and in the limit $\omega\tau \gg 1$ we get

$$P_{0 \rightarrow 1} \rightarrow 0.$$

Aufgabe 2: (*) Fermis Goldene Regel (5 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem eindimensionalen Potential, beschrieben durch

$$V(x) = -V_0 \Theta(d/2 - |x|),$$

wobei $V_0 > 0$. Der Potentialtopf sei so tief, dass die Grundzustandsenergie des Teilchens sehr klein ist im Vergleich zu der Energie, die es benötigen würde um den Potentialtopf zu verlassen: $\hbar^2 \pi^2 / (2md^2) \ll V_0$.

Betrachten Sie nun eine zeitabhängige Störung $H' = V\delta(x) \cos(\omega t)$ zu dem oben beschriebenen Potential. Bestimmen Sie die Übergangsrate vom Grundzustand in das Kontinuum aufgrund von H' in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie. Benutzen Sie dafür Fermis Goldene Regel.

Hinweis: Die Wellenfunktion für das Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf ist gegeben durch

$$|\phi_0(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right),$$

für $|x| \leq d/2$, was dem Anfangszustand entspricht. Im Kontinuum, dem Endzustand, gilt für die Wellenfunktion des Teilchens

$$|\psi_f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx),$$

wobei L eine Länge ist, die zur Normierung der Wellenfunktion eingeführt wird.

Solution

Considering that the potential box is deep enough that the lowest lying states sees the walls as infinitely high, the ground state is defined as:

$$|\phi_0(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{for } |x| \leq d/2, \quad \epsilon_0 = -V_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2}.$$

A delocalized state ($E > 0$) is characterized on the other hand by the continuous quantum number k , and is defined as:

$$|\psi_f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}, \quad \epsilon_f(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

The transition rate between two such states is given by, according to Fermi's golden rule

$$\Gamma_{0,k} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4} |\langle \psi_f(x) | V \delta(x) | \phi_0(x) \rangle|^2 [\delta(\epsilon_f(k) - \epsilon_0 - \hbar\omega) + \delta(\epsilon_f(k) - \epsilon_0 + \hbar\omega)],$$

with the δ -functions imposing energy conservation via an absorption (first one) or emission process (second one). The scalar product, on the other hand, keeps into account the strength of the potential channel connecting the initial and end states.

As in our problem the initial state has less energy than the final one, only absorption processes will be relevant. Solving the equation the equation $\epsilon_f(k) - \epsilon_0 - \hbar\omega = 0$ for k leads to

$$\bar{k}_{\pm} = \pm \bar{k} = \pm \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{\pi^2}{d^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2}}.$$

The total transition rates is given by the integral of $\Gamma_{0,k}$ over all possible final states. Using the identity of the dirac delta distribution

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{f'(x - x_i)}{|f'(x_i)|},$$

where x_i are the zeros of $f(x)$, we get

$$\Gamma_0 = \int \frac{L}{2\pi} dk \Gamma_{0,k} = \frac{V^2}{\hbar^3 d} \frac{m}{|\bar{k}|},$$

where in the first line the $\int \frac{L}{2\pi} dk$ is the dimensionless integration measure to sum the final states.

Aufgabe 3: Kommutatorrelationen

Überprüfen Sie die Kommutatorrelation für den Drehimpulsoperator \vec{L} und den Ortsoperator \vec{r}

$$[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, \vec{r}]] = 2\hbar^2 \{\vec{L}^2, \vec{r}\}.$$

Berechnen Sie dazu die Kommutatoren $[\vec{L}^2, x_i]$, wobei x_i eine Komponente des Ortsoperators bezeichnet.

Solution

We start with the commutation relation

$$[L_m, x_i] = \epsilon_{mjk} x_j [p_k, x_i] = -i\hbar \epsilon_{mji} x_j = i\hbar \epsilon_{mij} x_j,$$

and we have

$$[\vec{L}^2, x_i] = i\hbar \epsilon_{mij} \{L_m, x_j\},$$

where $\{a, b\} = ab + ba$ is the anti-commutator. We can use $[L_a, L_b] = i\hbar \epsilon_{abc} L_c$ to evaluate

$$[L_n, \{L_m, x_j\}] = i\hbar \left(\epsilon_{njk} \{L_m, x_k\} + \epsilon_{nmk} \{L_k, x_j\} \right).$$

Then we can have

$$\begin{aligned} [\vec{L}^2, [\vec{L}^2, x_i]] &= -\hbar^2 \left(L_i \{L_k, x_k\} - L_n \{L_n, x_i\} + L_n \{L_i, x_n\} - L_i \{L_k, x_k\} \right. \\ &\quad \left. + \{L_k, x_k\} L_i - \{L_n, x_i\} L_n + \{L_i, x_n\} L_n - \{L_k, x_k\} L_i \right), \end{aligned}$$

by using

$$\begin{aligned} \epsilon_{mij} \epsilon_{njk} &= \epsilon_{jmi} \epsilon_{jkn} = \delta_{mk} \delta_{in} - \delta_{mn} \delta_{ik}, \\ \epsilon_{mij} \epsilon_{nmk} &= \epsilon_{mij} \epsilon_{mkn} = \delta_{ik} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Solution

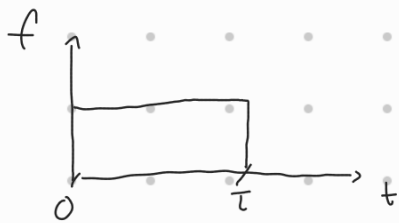
Now we can further use the followings

$$\begin{aligned} L_m x_m &= \epsilon_{mjk} x_m x_j p_k = 0, \\ L_m x_i L_m &= [L_m, x_i] L_m + x_i L_m^2 = L_m [x_i, L_m] + L_m^2 x_i \\ [L_i, x_m] &= i\hbar \epsilon_{imj} x_j = -i\hbar \epsilon_{mij} x_j = [x_i, L_m], \end{aligned}$$

to obtain the final relation

$$[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, x_i]] = 2\hbar^2 \{L_n^2, x_i\}$$

$$\textcircled{1} V(t) = -f(t)x$$



$$a) f(t) = \lambda \sqrt{2\hbar m \omega^3} \Theta(t) \Theta(\tau - t)$$

$$P_{m \rightarrow n}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\tilde{E}_n - \tilde{E}_m)t'/\hbar} \underbrace{= e^{i\omega t'}}_{\text{}} \langle n | V(t') | m \rangle \right|^2$$

$$P_{0 \rightarrow 1}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \underbrace{\int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega t'} \langle 1 | -f(t')x | 0 \rangle}_{\textcircled{I}} \right|^2 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{I} = -\lambda \sqrt{2\hbar m \omega^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega t'} \Theta(t') \Theta(\tau - t') \langle 1 | a^\dagger + a | 0 \rangle$$

$$= -\lambda \hbar \omega \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega t'} \Theta(t') \Theta(\tau - t')$$

$$= -\lambda \hbar \omega \int_0^\tau dt' e^{i\omega t'} = -\lambda \hbar \omega \left[-\frac{i}{\omega} e^{i\omega t'} \right]_0^\tau = i\lambda \hbar (e^{i\omega \tau} - 1) \quad \checkmark$$

$$\hookrightarrow P_{0 \rightarrow 1} = \frac{1}{\hbar^2} \left| i\lambda \hbar (e^{i\omega \tau} - 1) \right|^2 = \lambda^2 \underbrace{|e^{i\omega \tau} - 1|^2}_{=} = 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \quad \checkmark$$

$$\left[\begin{aligned} &= 2 - (e^{i\omega \tau} + e^{-i\omega \tau}) \\ &= 2 \left[1 - \frac{(e^{i\omega \tau} + e^{-i\omega \tau})}{2} \right] \\ &= 2(1 - \cos(\omega \tau)) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \end{aligned} \right]$$

Grenzfall $\omega \tau \ll 1$: Taylorentwicklung von $\sin^2 x$ um $x=0$:

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \sin^2(0) + 2\sin(0)\cos(0)x + \left(\frac{2\cos^2(0)}{2} - \frac{2\sin^2(0)}{2} \right) x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ &= x^2 + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow P_{0 \rightarrow 1} \approx \lambda^2 \omega^2 \tau^2 \quad \checkmark$$

$$b) f(t) = \lambda \sqrt{2\pi m \omega^3} \frac{e^{-t^2/\tau^2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$P_{0 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \lambda \sqrt{2\pi m \omega^3} \frac{e^{-t^2/\tau^2}}{\sqrt{\pi}} \right|^2 < 11 \times 10 >$$

$$= \frac{\lambda^2 \cancel{2\pi} \omega^3 \cancel{\pi^2}}{\cancel{4\pi^2} \cancel{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-t^2/\tau^2} \right|^2 \checkmark$$

$$= \frac{\lambda^2 \omega^2}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2/\tau^2 + i\omega t} \right|^2 \checkmark$$

NR:

quad. Ergänzung:

$$-\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t = -\frac{1}{\tau^2} (t^2 - i\omega \tau^2 t)$$

$$= -\frac{1}{\tau^2} \left(t - \frac{i\omega \tau^2}{2} \right)^2 + \frac{\omega^2 \tau^4}{4}$$

$$= t^2 - i\omega \tau^2 t - \frac{\omega^2 \tau^4}{4}$$

$$= \frac{\lambda^2 \omega^2}{\pi} e^{-\frac{\omega^2 \tau^4}{4}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{1}{\tau^2} \left(t - \frac{i\omega \tau^2}{2} \right)^2} \right|^2 \quad \left| \text{Gauß-Integral: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right.$$

$$= \frac{\lambda^2 \omega^2}{\pi} e^{-\frac{\omega^2 \tau^4}{4}} \left(\sqrt{\pi} \tau \right)^2 = \lambda^2 \omega^2 \tau^2 e^{-\frac{\omega^2 \tau^4}{4}} \checkmark$$

Grenzfall $\omega \tau \ll 1$: Taylorentw. von e^x um $x=0$

$$e^x = 1 + 0 \cdot e^{\frac{0^2}{2}} x + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\Rightarrow P_{0 \rightarrow 1} \approx \lambda^2 \omega^2 \tau^2 \text{ wie in a) } \checkmark$$

Grenzfall $\omega \tau \gg 1$:

$$e^{-\frac{\omega^2 \tau^4}{4}} \xrightarrow{\omega \tau \gg 1} 0 \Rightarrow P_{0 \rightarrow 1} \approx 0 \checkmark$$

(5/5)

② $V(x) = -V_0 \Theta\left(\frac{d}{2} - |x|\right)$ mit $V_0 > 0$.

Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2md^2} - V_0$ ✓

$H' = V \delta(x) \cos(\omega t) = \frac{V \delta(x)}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ ✓

Anfangszustand: $|\phi_0(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) := |0\rangle$ ✓ für $|x| \leq \frac{d}{2}$

Endzustand (Kontinuum): $|\psi_f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} := |k\rangle$ ✓

Es handelt sich um eine periodische Störung der Form $H'(t) = \Theta(t) (F e^{-i\omega t} + F^\dagger e^{i\omega t})$ mit $F = \frac{V \delta(x)}{2} = F^\dagger$

$\hookrightarrow \Gamma_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\overbrace{\delta(E_n - E_m - \hbar\omega)}^{\text{Absorption}} | \langle n | F | m \rangle |^2 + \overbrace{\delta(E_n - E_m + \hbar\omega)}^{\text{Emission (hier irrelevant)}} | \langle n | F^\dagger | m \rangle |^2 \right)$ ✓

$\hookrightarrow \Gamma_{0 \rightarrow k} = \frac{2\pi}{\hbar} | \langle k | F | 0 \rangle |^2 \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega)$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int_{-b}^b dx \psi_k^*(x) \frac{V}{2} \delta(x) \phi_0(x) \right|^2 \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int_{-b}^b dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \frac{V}{2} \delta(x) \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right|^2 \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{V}{2} \sqrt{\frac{2}{d}} \right|^2 \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{V^2 2}{L 4 d} \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega) = \frac{V^2 \pi}{\hbar L d} \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega)$$
 ✓

Gesamtrate $\Gamma = \sum_k \Gamma_{0 \rightarrow k} = \frac{V^2 \pi}{\hbar L d} \sum_k \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega)$

Wir ersetzen die Summe über k durch ein Integral mit der Zustandsdichte $\rho(k) = \frac{L}{2\pi}$ ✓

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \Gamma &= \frac{V^2 \pi}{\hbar k d} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{L}{2\pi} \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega) \\ &= \frac{V^2}{2d\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dk \delta(E_k - E_0 - \hbar\omega) \end{aligned}$$

$$= \frac{V^2}{2d\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dk \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2} + V_0 - \hbar\omega\right) \quad \left| \begin{array}{l} E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2} - V_0 \end{array} \right.$$

Nullstelle der δ -Fkt.:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_0 - \hbar\omega = 0 \quad | \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \quad \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V_0$$

$$\hookrightarrow k^2 - \frac{2mE_0}{\hbar^2} - \frac{2m\omega}{\hbar} = 0$$

$$\hookrightarrow k_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2mE_0}{\hbar^2} - \frac{2m\omega}{\hbar}} = \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{d^2} - \frac{2m\omega}{\hbar} - \frac{2mV_0}{\hbar^2}} := \pm k_0$$

mit $\delta(g(k)) = \sum_i \frac{\delta(k - k_i)}{|g'(k_i)|}$ wobei $g(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2} + V_0 - \hbar\omega \rightarrow g'(k) = \frac{\hbar^2 k}{m}$

$$= \frac{m}{\hbar^2 k_0} (\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)) \text{ folgt:}$$

$$\Gamma = \frac{V^2}{2d\hbar} \frac{m}{\hbar^2 k_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk (\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0))$$

$$= \frac{V^2}{2d\hbar} \frac{m}{\hbar^2 k_0} \cdot 2 = \frac{mV^2}{\hbar^3 d k_0} \quad \checkmark \quad \text{§(515)}$$

§(10/10) ☺

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 4

Abgabe: 21.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 25.11.2025

Aufgabe 1: (*) Wasserstoffatom im elektrischen Feld (4 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}(t)$, das entlang der z -Richtung liegt. Die Amplitude betrage $E(t) = A\tau/(\tau^2 + t^2)$, wobei A und τ vorgegebene Konstanten sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P für den Übergang des Elektrons aus dem Grundzustand (bei $t \rightarrow -\infty$) in den $2P$ -Zustand (bei $t \rightarrow +\infty$).

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}.$$

Solution

The electric field in the z -direction implies the Hamiltonian

$$H = H_0 + V(t) = H_0 + qE(t)z,$$

where q is the charge of the electron. By using first-order perturbation theory, we have

$$\begin{aligned} A_{|m\rangle \rightarrow |n\rangle}(t) &= \delta_{mn} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i(E_n - E_m)t'/\hbar} \langle n|V(t')|m\rangle \\ &= 0_{|m \neq n} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega_{nm}t'} \frac{A\tau q}{\tau^2 + t'^2} \langle n|z|m\rangle, \\ &= \frac{Aq\pi}{i\hbar} e^{-|\omega_{nm}|\tau} \langle n|z|m\rangle \end{aligned}$$

where we use the integration formula in the hint and with $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$. With $|m\rangle = |1s\rangle$ and $|n\rangle = |2p\rangle$, we have the probability

$$P_{1s \rightarrow 2p} = |A(t)|^2 = \frac{A^2 q^2 \pi^2}{\hbar^2} e^{-2|\omega|\tau} |\langle 2p|z|1s\rangle|^2,$$

where $|\omega|_{1s \rightarrow 2p} = \left| \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \right| = \frac{3}{4} \frac{E_1}{\hbar}$.

Solution

Then we use the following wave functions for the states

$$|1s\rangle : \psi_{100}(\vec{r}) = R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$|2p, l=1\rangle : \psi_{21m}(\vec{r}) = R_{21}(r)Y_{1m}(\theta, \phi),$$

where $m = -1, 0, 1$ and Bohr radius a_0 . Here we only need $\psi_{210}(\vec{r})$ since $Y_{1,\pm 1}(0, \phi) \propto e^{\pm i\phi}$ and $\int_0^{2\pi} d\phi e^{\pm i\phi} = 0$, then we have

$$\psi_{210} = R_{21}(r)Y_{10}(0, \phi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta.$$

Using spherical coordinates, $z = r \cos \theta$, we have

$$\begin{aligned} \langle 2p|\vec{z}|1s\rangle &= \frac{1}{4\pi} \frac{a_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{a_0^4} \int_0^\infty r^3 dr \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-3/2(r/a_0)} \right] \int_{-1}^1 \cos^2 \theta d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \frac{2^8}{3^5}, \end{aligned}$$

and the probability

$$P_{1s \rightarrow 2p} = \frac{A^2 \pi^2}{\hbar^2} e^{-2\omega\tau} a_0^2 \frac{2^{15}}{3^{10}} \simeq 0.55 \frac{A^2 \pi^2}{\hbar^2} e^{-2\omega\tau} a_0^2.$$

Aufgabe 2: (*) Lebensdauer für Dipolübergang (2 + 3 + 1 = 6 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, wobei sich das Elektron in einem $2P$ -Zustand mit $m = 0, +1$ oder -1 befindet. Mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung erhält man für die Übergangsrates in den $1S$ -Zustand (in SI-Einheiten)

$$\frac{d\Gamma_{2P \rightarrow 1S, \vec{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2P,1S} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}^*|^2,$$

wobei \vec{k} und λ Wellenzahl und Polarisation des Photons sind und sich ω aus der Energiedifferenz zwischen dem $2P$ - und $1S$ -Niveau ergibt.

- a) Summieren Sie über beide Polarisationszustände und integrieren Sie über den Raumwinkel $d\Omega$ (des Vektors \vec{k}), um die Lebensdauer in Abhängigkeit vom Betrag des Dipolmatrixelements $|\vec{d}_{2P,1S}|$ zu bekommen.

Solution

We have

$$\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \sum_{\lambda} \int d\Omega \frac{d\Gamma_{2p \rightarrow 1s, \vec{k}\lambda}}{d\Omega}, \quad \lambda = 1, 2.$$

Now parametrise the angle with

$$\vec{d}_{2p,1s} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k},1}^* = \cos \theta_1 |\vec{d}_{1p,1s}|, \quad \vec{d}_{2p,1s} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k},2}^* = \cos \theta_2 |\vec{d}_{2p,1s}|,$$

then we have

$$\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \int d\Omega \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2).$$

Next rewrite the $\cos \theta_i$ in spherical coordinates as

$$\cos \theta_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad \cos \theta_2 = \sin \theta \sin \phi,$$

which corresponds to choosing the coordinate system such that the two polarization vectors span the $x - y$ plane. Finally we have

$$\int d\Omega (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2) = \int_{-1}^1 d \cos \theta \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \frac{8\pi}{3}.$$

Hence we have

$$\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \frac{4\alpha}{3c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2,$$

and the lifetime is

$$\tau = 1/\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \left(\frac{4\alpha}{3c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \right)^{-1}$$

- b) Berechnen Sie das Dipolmatrixelement $\vec{d}_{2P,1S}$ und drücken Sie die Lebensdauer τ durch α , m_e , c und \hbar aus.

Solution

$$\vec{d}_{2p \rightarrow 1s} = \langle 1s | \vec{R} | 2p \rangle = \int r^2 dr \int d\Omega \psi_{1s}^*(\vec{r}) \psi_{2p}(\vec{r}) \vec{r}.$$

We use

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = R_{10}(r) Y_{00}(\theta, \phi), \quad \psi_{2s}(\vec{r}) = R_{21}(r) Y_{1m}(\theta, \phi), \quad \vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

and

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi},$$

then we have

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \phi &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,-1} - Y_{11}), \\ \sin \theta \sin \phi &= -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,-1} + Y_{11}), \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}. \end{aligned}$$

Hence we have

$$R_{10} = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}}, \quad R_{21} = \frac{1}{(24a_0^3)^{1/2}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}},$$

yielding

$$\begin{aligned} \vec{d}_{2p,1s} &= \int_0^\infty dr r^4 \frac{1}{a_0^4 \sqrt{6}} e^{-\frac{3r}{2a_0}} \int d\Omega \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Y_{1m} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,-1} - Y_{11}) \\ -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,-1} + Y_{11}) \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_0^4 \sqrt{6}} \frac{256a_0^5}{81} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}) \\ -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \delta_{m,0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} |\vec{d}_{2p,1s}|^2 &= \frac{a_0^2}{6} \left(\frac{256}{81} \right)^2 \left[\frac{1}{6} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) + \frac{1}{6} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) + \frac{1}{3} \delta_{m,0} \right] \\ &= \frac{a_0^2 2^{15}}{3^{10}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1} + \delta_{m,0}). \end{aligned}$$

Solution

Now with $\omega = \frac{E_{2p} - E_{1s}}{\hbar} = \frac{\alpha^2 mc^2}{\hbar} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha^2 mc^2}{\hbar} \frac{3}{8}$ and $a_0 = \frac{\hbar}{\alpha mc}$, we can compute the life time

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{4\alpha}{3c^2} \omega^3 \alpha_0^2 \frac{2^{15}}{3^{10}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1} + \delta_{m,0}) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\alpha^7 m^3 c^4 a_0^2 2^8}{\hbar^3} \underbrace{(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1} + \delta_{m,0})}_{:=1 \text{ for } m=-1,0,1} \right)^{-1} \\ &= \frac{\hbar}{\alpha^5 mc^2} \frac{3^8}{2^8}\end{aligned}$$

- c) Werten Sie τ numerisch aus. Numerische Werte für die Konstanten finden Sie auf der Webseite https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/contents_sports.html.

Solution

$$\tau = 1.595 \times 10^{-9} \text{s}$$

Aufgabe 3: Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes

Der Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes in einem endlichen Volumen V ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int d^3 r \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \\ &= \frac{V \epsilon_0 c^2}{2} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{c^2} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

wobei $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$ aus Gl. (2) (siehe unten) extrahiert werden kann. Zeigen Sie, dass Gl. (1) in folgender Form geschrieben werden kann

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar c k \left(\vec{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \vec{a}_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right),$$

wobei \vec{k} den Wellenvektor und λ die Polarization bezeichnet. Das Vektorpotential ist dabei gegeben durch (mit $\omega_k = kc$)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left(a_{\vec{k}, \lambda} \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right), \quad (2)$$

wobei $a_{\vec{k}, \lambda}$ und $a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind. Es gilt

$$[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}] = 0, \quad \text{und} \quad [a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger] = 0.$$

Hinweis: O.B.d.A. kann man Polarisationsvektoren wählen, so dass gilt $\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} = \vec{\epsilon}_{-\vec{k}, \lambda}$.

Solution

It is enough to consider the following the form of the vector potential $\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ with

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left(a_{\vec{k},\lambda} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}^* e^{i\omega_k t} \right),$$

which holds only in the integral. We can employ the properties of polarisation vectors ($\lambda = 1, 2$)

$$\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0, \quad \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \quad |\vec{\varepsilon}_i| = 1, \quad \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}_2, \quad \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\varepsilon}_2 = -\vec{\varepsilon}_1,$$

and obtain the followings

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) &= \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left(a_{\vec{k},\lambda} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} (-i\omega_k) e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}^* (i\omega_k) e^{i\omega_k t} \right) \\ \vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0}} \left[\left(a_{\vec{k},1} |\vec{k}| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},2} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k},1}^{\dagger} |\vec{k}| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},2}^* e^{i\omega_k t} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(a_{\vec{k},2} |\vec{k}| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},1} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k},2}^{\dagger} |\vec{k}| \vec{\varepsilon}_{\vec{k},1}^* e^{i\omega_k t} \right) \right]. \end{aligned}$$

With $\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$ and $|\vec{\varepsilon}_i| = 1$, we further have

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}|^2 &= \sum_{\lambda} \frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0} \left[\omega_k^2 \left(a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} \right) + a_{\vec{k},\lambda}^2 (-\omega_k^2) e^{-2i\omega_k t} + \left(a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \right)^2 (-\omega_k^2) e^{2i\omega_k t} \right] \\ |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}|^2 &= \sum_{\lambda} \frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0} \left[k^2 \left(a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} \right) + a_{\vec{k},\lambda}^2 k^2 e^{-2i\omega_k t} + \left(a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \right)^2 k^2 e^{2i\omega_k t} \right]. \end{aligned}$$

Now use $\omega_k^2 = c^2 k^2$ and $[a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}$ and arrive at

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 &= 2 \sum_{\lambda} \frac{\hbar}{2kcV\epsilon_0} k^2 \left(a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} + a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} \right) \\ &= \frac{2\hbar}{cV\epsilon_0} \sum_{\lambda} k \left(a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

and finally

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \frac{V\epsilon_0 c^2}{2} \frac{2\hbar}{cV\epsilon_0} \sum_{\vec{k},\lambda} k \left(a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} k \left(a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \vec{E}(t) = \frac{\overset{=E(t)}{A_T}}{r^2+t^2} \hat{z} \rightarrow V(t) = -e E(t) \hat{z} = -\frac{e A_T}{r^2+t^2} \hat{z}$$

Grundzustand: $n=1, l=0, m=0$

2P-Zustand: $n=2, l=1, m=0, \pm 1$

$$c = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i(E_n - E_m)t'/\hbar} \langle n | V(t') | m \rangle \quad (= \text{Übergangsamplitude})$$

$$= \frac{i e A_T}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \frac{1}{r^2+t'^2} \langle 2, 1, m | \hat{z} | 1, 0, 0 \rangle$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{i\omega x}}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}$

→ mit $x = t'$ und $a = \tau$ folgt:

$$= i \frac{e A_T}{\hbar} \frac{\pi}{\tau} e^{-|\omega|\tau} \langle 2, 1, m | \hat{z} | 1, 0, 0 \rangle$$

Allgemein für $\langle n', l', m' |$ mit $\psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$, $\psi_{n'l'm'} = R_{n'l'}(r) Y_{l'm'}(\theta, \phi)$:

↳ ϕ -Abhängigkeit von $\langle n', l', m' | \hat{z} | n, l, m \rangle$ ($z = r \cos\theta$ hat keine ϕ -Abh.)

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{-im'\phi} \cdot 1 \cdot e^{im\phi} = \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-m')\phi}$$

↳ $m - m' \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow$ da $n=0$, muss $m'=0$ sein

↳ Nur der Übergang zu $\langle 2, 1, 0 |$ ist erlaubt

$$\psi_{1,0,0} = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} a_0^{-3/2} e^{-r/a_0}$$

$$\psi_{2,0,0} = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} a_0^{-5/2} r e^{-r/2a_0} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$\hookrightarrow i \frac{e A_T \pi}{\hbar} e^{-|\omega|\tau} \langle 2, 1, 0 | \hat{z} | 1, 0, 0 \rangle$$

$$= i \frac{eA\pi}{k} e^{-i\omega t} \cdot 2\pi \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a_0^{-4}$$

$$\underbrace{\int_0^\infty dr e^{-\frac{r}{a_0}} r^4 e^{-\frac{r}{2a_0}}}_{(1)} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \cos^2 \theta \sin \theta}_{(2)}$$

$$(1) = \int_0^\infty dr \frac{1}{r^4} e^{-\frac{3r}{2a_0}}$$

p.I.: $\int f'g = [fg] - \int fg'$
 $f' = e^{-\frac{3r}{2a_0}} \rightarrow f = -\frac{2a_0}{3} e^{-\frac{3r}{2a_0}}$
 $g = r^4 \rightarrow g' = 4r^3$

$$\text{P.I.} = \left[-\frac{2a_0}{3} e^{-\frac{3r}{2a_0}} r^4 \right]_0^\infty - \int_0^\infty dr \left(-\frac{2a_0}{3} \right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} \cdot 4r^3$$

$$= 0 + \int_0^\infty dr \frac{8}{3} a_0 r^3 e^{-\frac{3r}{2a_0}} \quad \left| \quad g = r^3 \rightarrow g' = 3r^2 \right.$$

$$\text{P.I.} = \left[\frac{8}{3} a_0 r^3 \left(-\frac{2a_0}{3} \right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} \right]_0^\infty - \int_0^\infty dr \frac{8}{3} a_0 \left(-\frac{2a_0}{3} \right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} \cdot 3r^2$$

$$= 0 + \frac{16}{3} a_0^2 e^{-\frac{3r}{2a_0}} r^2$$

$$\text{P.I.} = \left[\frac{16}{3} a_0^2 \left(-\frac{2a_0}{3} \right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} r^2 \right]_0^\infty - \int_0^\infty dr \frac{16}{3} a_0^2 \left(-\frac{2a_0}{3} \right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} \cdot 2r$$

$$= 0 + \frac{64}{9} a_0^3 e^{-\frac{3r}{2a_0}} r$$

$$\text{P.I.} = \left[\frac{64}{9} a_0^3 \left(-\frac{2a_0}{3} \right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} r \right]_0^\infty - \int_0^\infty dr \frac{64}{9} a_0^3 \left(-\frac{2a_0}{3} \right) e^{-\frac{3r}{2a_0}}$$

$$= 0 + \int_0^\infty dr \frac{128}{27} a_0^4 e^{-\frac{3r}{2a_0}} = \left[\frac{128}{27} a_0^4 \cdot \left(-\frac{2a_0}{3} \right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} \right]_0^\infty$$

$$= \left[-\frac{256}{81} a_0^5 e^{-\frac{3r}{2a_0}} \right]_0^\infty = \frac{256}{81} a_0^5$$

$$(2) = \int_0^\pi d\theta \cos^2 \theta \sin \theta \quad \left| \quad u = \cos \theta \rightarrow du = -\sin \theta d\theta \right.$$

$$= \int_1^{-1} u^2 (-du) = \int_{-1}^1 u^2 du = \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{i e A \pi}{\hbar} e^{-i \omega t} \cdot 2 \pi \frac{2}{\sqrt{4 \pi}} \frac{1}{\sqrt{24}} \sqrt{\frac{3}{4 \pi}} a_0^{-4}$$

$$\int_0^{\infty} dr e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{1}{r^4} e^{-\frac{r}{2 a_0}} \int_0^{\pi} d\theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{i e A}{a_0^4 \hbar} \pi \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e^{-i \omega t} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{256}{81} a_0^5$$

$$= \frac{i e A}{\hbar} \pi e^{-i \omega t} \cdot \frac{512}{243 \sqrt{8}} a_0$$

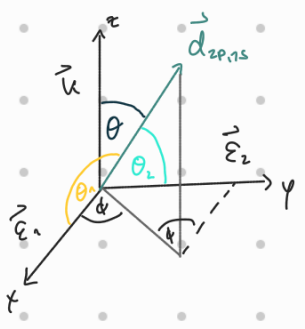
$$\hbar |\omega| = E_2 - E_1 = -\frac{E_R}{2^2} - \left(-\frac{E_R}{1^2}\right) = \frac{3}{4} E_R = \hbar \omega \approx 10,2 \text{ eV}$$

$$= \frac{i e A}{\hbar} \pi e^{-\frac{3}{4} E_R T} \cdot \frac{128}{243} \sqrt{2} a_0$$

$$\omega = \frac{3}{4} \frac{k c}{\hbar} \alpha^2 m_e c^2 \frac{1}{Z^2} = \frac{3}{8} c^2 \alpha^2 m_e$$

$$\hookrightarrow P_{1s \rightarrow 2p} = \left(\frac{\pi e A}{\hbar} \frac{128}{243} \sqrt{2} a_0 \right)^2 e^{-\frac{3}{2} E_R T} \quad \checkmark \quad \Sigma(4/4)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d\Gamma_{2p \rightarrow 1s, \vec{e}_n}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s} \cdot \vec{E}_{\vec{e}_n}^*|^2 \quad \left| \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \\ \omega &= \frac{E_{2p} - E_{1s}}{\hbar} = \frac{3}{4} E_R \\ \lambda &= 1, 2 \end{aligned} \right.$$



$$\left. \begin{aligned} d\Omega &= \sin \theta d\theta d\phi \\ \cos \theta_1 &= \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta_2 &= \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \right\} \text{Kugelkoordinaten}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{d}_{2p,1s} \cdot \vec{E}_1 = |\vec{d}_{2p,1s}| \cdot |\vec{E}_1| \cos \theta_1 = |\vec{d}_{2p,1s}| \sin \theta \cos \phi \\ \vec{d}_{2p,1s} \cdot \vec{E}_2 = |\vec{d}_{2p,1s}| \cdot |\vec{E}_2| \cos \theta_2 = |\vec{d}_{2p,1s}| \sin \theta \sin \phi \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma_{2p \rightarrow 1s}}{d\Omega} = \frac{d\Gamma_1}{d\Omega} + \frac{d\Gamma_2}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 (\sin^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \sin^2\theta \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi \frac{1}{4} (3\sin\theta - \sin(3\theta)) d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \left[\frac{1}{4} (-3\cos\theta + \frac{1}{3}\cos(3\theta)) \right]_0^\pi$$

$$= \frac{\alpha}{c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \left[\frac{1}{4} (3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3}) \right]$$

$$= \frac{\alpha}{c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2p,1s}|^2 \cdot \frac{4}{3} \quad \checkmark$$

Die Lebensdauer ist dann noch gegeben durch $\tau = \frac{1}{\Gamma_{2p \rightarrow 1s}} = \frac{3c^2}{4\alpha\omega^3} \frac{1}{|\vec{d}_{2p,1s}|^2} \quad \checkmark$

$$b) \vec{d}_{2p,1s} = \langle 1s | \vec{R} | 2p \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi_{1s}^* \vec{r} \psi_{2p} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\psi_{2,0,0} = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} a_0^{-3/2} e^{-r/2a_0} = R_{2,0}(r) Y_{0,0}(\theta, \phi) \quad \checkmark$$

$$\psi_{2,1,0} = \frac{1}{\sqrt{24}} a_0^{-5/2} e^{-r/2a_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = R_{2,1}(r) Y_{1,0}$$

$$\psi_{2,1,\pm 1} = \mp \frac{r}{\sqrt{24}} a_0^{-5/2} e^{-r/2a_0} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} = R_{2,1}(r) Y_{1,\pm 1}$$

} $\psi_{2,1,m}$

Wenn man die in \vec{r} vorkommenden trig. Funktionen durch Kugelflächenfunktionen ausdrückt, kann man deren Orthogonalitätsrelation nutzen, um die Rechnung zu vereinfachen: $\int Y_{l,m}^*(\theta, \phi) Y_{l',m'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ (Orthonorm) \checkmark

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi}$$

$$\rightarrow \sin\theta = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11} e^{-i\phi}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}$$

$$\begin{aligned} Y_{11} + Y_{1-1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \cdot 2i \sin\phi \\ &= 2i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11} e^{-i\phi} \sin\phi \end{aligned}$$

$$\sin\phi = \frac{(Y_{11} + Y_{1-1}) e^{i\phi}}{Y_{11} 2i}$$

$$\begin{aligned} Y_{11} - Y_{1-1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} \\ &= Y_{11} e^{-i\phi} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\ &= 2 Y_{11} e^{-i\phi} \cos\phi \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\cos\phi = \frac{(Y_{11} - Y_{1-1}) e^{i\phi}}{2 Y_{11}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin\theta \cos\phi &= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11} e^{-i\phi} \frac{(Y_{11} - Y_{1-1}) e^{i\phi}}{2 Y_{11}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{11} - Y_{1-1}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta \sin\phi &= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11} e^{-i\phi} \frac{(Y_{11} + Y_{1-1}) e^{i\phi}}{Y_{11} 2i} \\ &= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{(Y_{11} + Y_{1-1})}{2i} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\vec{d}_{2p \rightarrow 1s} = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{11}^* \hat{r} Y_{10} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{\infty} r^3 \cdot 2 a_0^{-3/2} e^{-r/a_0} \cdot \frac{r}{\sqrt{2\pi}} a_0^{-5/2} e^{-r/2a_0} dr \int Y_{10} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) \\ -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1-1} + Y_{11}) \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} \end{pmatrix} Y_{1m} d\Omega$$

$$= \int_0^{\infty} dr \underbrace{\frac{r^4}{a_0^4} \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{3r}{2a_0}}}_{\text{analog zu (1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (\delta_{-1,m} - \delta_{1,m}) \\ -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (\delta_{-1,m} + \delta_{1,m}) \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{m,0} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6} a_0^4} \frac{256}{81} a_0^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}) \\ -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \delta_{m,0} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow |\vec{d}_{zp \rightarrow 1s}|^2 = \left(\frac{256 a_0}{\sqrt{6} 81} \right)^2 \left(\frac{1}{6} (\delta_{m,-1}^2 - 2 \delta_{m,-1} \delta_{m,1} + \delta_{m,1}^2) + \frac{1}{6} (\delta_{m,-1}^2 + 2 \delta_{m,-1} \delta_{m,1} + \delta_{m,1}^2) + \frac{1}{3} \delta_{m,0}^2 \right)$$

$$= \left(\frac{256 a_0}{\sqrt{18} 81} \right)^2 (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1} + \delta_{m,0}) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{E_{z0} - E_{1s}}{\hbar} = \frac{3}{4\hbar} E_R = \frac{3}{4} \frac{\hbar c}{\hbar} \alpha^2 \frac{m_e c}{2\hbar} = \frac{3}{8\hbar} c^2 \alpha^2 m_e$$

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e c \alpha}$$

$$\tau = \frac{3c^2}{4\alpha\omega^3} \frac{1}{|\vec{d}_{zp \rightarrow 1s}|^2} = \frac{3c^2}{4\alpha \left(\frac{27}{512} \frac{c^6 \alpha^6 m_e^3}{\hbar^3} \right)} \left(\frac{\sqrt{18} 81}{256} \frac{m_e c \alpha}{\hbar} \right)^2$$

$$= \frac{3 \sqrt{18}^2 81^2 \cdot 512}{4 \cdot 27 \cdot 256^2} \frac{\hbar}{m_e \alpha^5 c^2}$$

$$= \frac{3^8}{2^8} \frac{\hbar}{\alpha^5 m_e c^2} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\Sigma(10/10)}$$

$$c) \tau \approx 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ s} \quad \checkmark \quad \Sigma(6/6)$$

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 5

Abgabe: 28.11.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 02.12.2025

Aufgabe 1: Eichinvarianz

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines geladenen Teilchens im Magnetfeld. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned}\vec{A} \rightarrow \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \\ \Phi \rightarrow \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \\ \Psi \rightarrow \Psi' &= e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda}\Psi,\end{aligned}$$

wobei \vec{A} das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. \vec{A} , Φ und Λ sind Funktionen von \vec{r} und t . Q bezeichnet die elektrische Ladung des Teilchens.

Solution

The Schrödinger equation for the transformed fields is given by

$$\begin{aligned}0 &= i\hbar\partial_t\Psi' - \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A}' \right)^2 + Q\Phi' \right] \Psi' \\ &= e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda} \left\{ i\hbar\partial_t\Psi - \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A} \right)^2 + Q\Phi \right] \Psi \right\},\end{aligned}$$

which directly shows the invariance, where we used

$$\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A}' \right) \Psi' = e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A} \right) \Psi,$$

and

$$(i\hbar\partial_t - Q\Phi') \Psi' = e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda} (i\hbar\partial_t - Q\Phi) \Psi.$$

Aufgabe 2: (*) Relativistische Kinematik (4 Punkte)

- a) Ein Teilchen mit Masse m und Energie E bewegt sich entlang der x -Achse und kollidiert mit einem identischen Teilchen in Ruhe, so dass sich nach der Kollision beide Teilchen mit dem Streuwinkel θ zur x -Achse bewegen. Berechnen Sie den Streuwinkel $\cos\theta$ in Abhängigkeit von E und m . Betrachten Sie den Winkel $\cos\theta$ im relativistischen ($E \gg mc^2$) und nicht relativistischen ($(E - mc^2) \ll mc^2$) Limit und berechnen Sie jeweils die ersten beiden führenden Terme.

Solution

The four momenta can be written as

$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ |\vec{p}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} mc^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p'_1 = \begin{pmatrix} E' \\ |\vec{p}'| \cos \theta \\ |\vec{p}'| \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p'_2 = \begin{pmatrix} E' \\ |\vec{p}'| \cos \theta \\ -|\vec{p}'| \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

where \vec{p} is the three-momentum of the moving particle before the collision and $|\vec{p}'|$ is the absolute value of the three-momentum of both particles after the collision. From energy and momentum conservation (along the x axis), we have the following relations

$$E + mc^2 = 2E' \quad \text{and} \quad |\vec{p}| = 2|\vec{p}'| \cos \theta.$$

In addition, we have the on-shell relations of both particles

$$m^2 c^4 = E^2 - \vec{p}^2 c^2 = E'^2 - \vec{p}'^2 c^2.$$

Now we can use the first two equations to solve for $\cos \theta$ which leads to

$$\cos \theta = \frac{|\vec{p}|}{2|\vec{p}'|} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{2\sqrt{E'^2 - m^2 c^4}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{E + 3mc^2}}.$$

In the relativistic limit ($mc^2/E \ll 1$), the results reads

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + mc^2/E}{1 + 3mc^2/E}} = 1 - mc^2/E + \mathcal{O}((mc^2/E)^2).$$

On the other hand, in the non-relativistic limit ($(E - mc^2)/(mc^2) \ll 1$), we get

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{2 + (E - mc^2)/(mc^2)}{4 + (E - mc^2)/(mc^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{E - mc^2}{mc^2} + \mathcal{O}(((E - mc^2)/(mc^2))^2).$$

The first term corresponds to the result that can be obtained in classical mechanics.

- b) Ein Photon mit Wellenlänge λ und Energie $E = hc/\lambda$ bewegt sich entlang der x -Achse und kollidiert mit einem ruhendem Elektron. Zeigen Sie, dass die Wellenlänge λ' des Photons nach der Kollision geben ist durch

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

wobei θ der Streuwinkel zwischen dem gestreuten Photon und der x -Achse ist. Zeigen Sie, dass für $\theta \approx \pi$ und $E \gg m_e c^2$ in führender Ordnung λ' unabhängig von λ ist.

Solution

In this case we can write the four momenta as

$$p_\gamma = \begin{pmatrix} E \\ (E/c) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} m_e c^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p'_\gamma = \begin{pmatrix} E' \\ (E'/c) \cos \theta \\ (E'/c) \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p'_2 = \begin{pmatrix} E'_e \\ (E/c) - (E'/c) \cos \theta \\ -(E'/c) \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

From energy conservation directly follows

$$E + m_e c^2 = E' + E'_e$$

and the on-shell condition of the electron can be written as

$$\begin{aligned} E'^2 &= E'^2 \sin^2 \theta + (E - E' \cos^2 \theta)^2 + m_e^2 c^4 \\ &= E'^2 + E^2 + m_e^2 c^4 - 2EE' \cos \theta \\ &= E'^2 + E^2 + m_e^2 c^4 + 2Em_e c^2 - 2E'(E + m_e c^2) \end{aligned}$$

where the last equality follows from inserting the the energy conservation relations for E_e . Now can solve for E'

$$E' = \frac{m_e c^2 E}{E(1 - \cos \theta) + m_e c^2}.$$

Thus, the wavelength of the photon after the collision is given by

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Considering the limit $\theta \approx \pi$ and afterwards $m_e c^2 / E \ll 1$ leads to

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + \frac{h}{m_e c} \left(2 - \frac{(\theta - \pi)^2}{2} + \mathcal{O}((\theta - \pi)^4) \right) \\ &= \frac{hc}{E} + \frac{h}{m_e c} \left(2 - \frac{(\theta - \pi)^2}{2} \right) \\ &= \frac{h}{m_e c} \left(2 + \frac{m_e c^2}{E} - \frac{(\theta - \pi)^2}{2} + \mathcal{O}((\theta - \pi)^4) \right), \end{aligned}$$

so that the first non-vanishing term is independent of $E(\lambda)$.

Aufgabe 3: Levi-Civita-Tensor und Lorentz-Transformation

- a) Zeigen Sie, dass der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor ein Pseudotensor vierter Stufe unter Lorentz-Transformation ist, *d.h.* dass gilt

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda) \Lambda^\alpha_{\alpha'} \Lambda^\beta_{\beta'} \Lambda^\gamma_{\gamma'} \Lambda^\delta_{\delta'} \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Ausdruck in der Mitte die Definition des Levi-Civita-Tensors erfüllt.

Solution

First we use the column expansion of determinant

$$\det(\Lambda) = \Lambda_{\alpha'}^0 \Lambda_{\beta'}^1 \Lambda_{\gamma'}^2 \Lambda_{\delta'}^3 \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'},$$

and we can show that

$$\epsilon'^{0123} = \det(\Lambda) \Lambda_{\alpha'}^0 \Lambda_{\beta'}^1 \Lambda_{\gamma'}^2 \Lambda_{\delta'}^3 \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \det(\Lambda)^2 = (\pm 1)^2 = 1.$$

Second we show that by permuting two indices, we have

$$\begin{aligned} \epsilon'^{\alpha\beta\delta\gamma} &= \det(\Lambda) \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \Lambda_{\gamma'}^{\delta} \Lambda_{\delta'}^{\gamma} \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \\ &= \det(\Lambda) \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \Lambda_{\delta'}^{\gamma} \Lambda_{\gamma'}^{\delta} (-1) \epsilon^{\alpha'\beta'\delta'\gamma'} \\ &= -\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta}, \end{aligned}$$

where the (-1) factor comes from the interchange of two columns.

Alternatively, we have

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda) \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \Lambda_{\gamma'}^{\gamma} \Lambda_{\delta'}^{\delta} \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = (\det(\Lambda))^2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

which also follows directly from the definition of the determinant.

- b) Zeigen Sie nun, dass $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} d_{\delta}$, wobei $a_{\alpha}, b_{\beta}, c_{\gamma}, d_{\delta}$ Vierervektoren sind, ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen ist.

Solution

Here we define $X := \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} d_{\delta}$, and we have have

$$\begin{aligned} X' &= \epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} a'_{\alpha} b'_{\beta} c'_{\gamma} d'_{\delta} \\ &= \det(\Lambda) \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \Lambda_{\gamma'}^{\gamma} \Lambda_{\delta'}^{\delta} \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} \Lambda_{\gamma'}^{\rho} \Lambda_{\delta'}^{\sigma} a_{\mu} b_{\nu} c_{\rho} d_{\sigma} \\ &= \det(\Lambda) g_{\alpha'}^{\mu} g_{\beta'}^{\nu} g_{\gamma'}^{\rho} g_{\delta'}^{\sigma} \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} a_{\mu} b_{\nu} c_{\rho} d_{\sigma} \\ &= \det(\Lambda) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_{\mu} b_{\nu} c_{\rho} d_{\sigma} \\ &= \det(\Lambda) X. \end{aligned} \tag{1}$$

Hence X is a pseudoscalar under Lorentz transformation. Note that $\det(\Lambda) = \pm 1$ for the proper or improper Lorentz transformation.

Aufgabe 4: (*) Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld

(1+1+1+2+1 = 6 Punkte)

- a) Leiten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld her. Benutzen Sie dazu die relativistische Energie-Impuls Beziehung und verwenden Sie das Korrespondenzprinzip mit minimaler Kopplung.

Solution

The relativistic energy-momentum relation is given by

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2.$$

Considering the correspondence principle with minimal coupling, we have to perform the following replacements

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}, \quad E \rightarrow i\hbar\partial_t - q\phi,$$

which then leads to the Klein-Gordon equation

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2 \Psi = \left[m^2 c^4 + \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 c^2 \right] \Psi.$$

- b) Zeigen Sie, dass Ψ^* ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt, wobei Ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus dem Aufgabenteil (a) ist.

Solution

We get the equation for Ψ^* by complex conjugation, where in this case only some signs will change:

$$\begin{aligned} \left[(i\hbar\partial_t - q\phi)^2 \right]^* \Psi^* &= m^2 c^4 \Psi^* + \left[\left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 c^2 \right]^* \Psi^* \\ (-i\hbar\partial_t - q\phi)^2 \Psi^* &= m^2 c^4 \Psi^* + \left(i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 c^2 \Psi^*. \end{aligned}$$

Now we can replace $q' = -q$ and obtain the following equation

$$(i\hbar\partial_t - q'\phi)^2 \Psi^* = m^2 c^4 \Psi^* + \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q'\vec{A} \right)^2 c^2 \Psi^*,$$

which again is the Klein-Gordon equation with q' instead of q .

- c) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$(-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4) u(\vec{r}) = [E - e\Phi(r)]^2 u(\vec{r}).$$

Solution

For a Coulomb potential we have $\vec{A} = 0$ and we get the following equation by using the Ansatz

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2 u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar} = m^2 c^4 u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar} + \left(-i\hbar\vec{\nabla} \right)^2 c^2 u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}.$$

After taking the time derivative the differential equation for $u(\vec{r})$ is given by:

$$(E^2 + q^2 \phi^2 - 2q\phi E) u(\vec{r}) = \left(m^2 c^4 - c^2 \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \right) u(\vec{r}).$$

- d) Vergleichen Sie das daraus folgende Eigenwertproblem mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2 + [(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen, die in der Lösung der Klein-Gordon-Gleichung auftauchen. Der Vergleich liefert die Relationen zu den Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.

Solution

We follow closely the solution of the classical hydrogen atom. Since we have radial symmetric problem we can use the following Ansatz:

$$u(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\Theta, \varphi),$$

and get the following equation for the radial part R_{nl} :

$$\frac{1}{c^2} \left(\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 - m^2 c^4 \right) R_{nl}(r) = \hbar^2 \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_{nl}(r) \quad (2)$$

The differential equation for the non-relativistic hydrogen atom is given by

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right) R'_{n'l'}(r) = \left(E' + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R'_{n'l'}(r).$$

Next, we rewrite Eq. (2) to obtain the same form as in the non-relativistic case:

$$\left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{2E} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R_{nl}(r) = \frac{\hbar^2 c^2}{2E} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{l(l+1) - Z^2 \alpha^2}{r^2} \right) R_{nl}(r)$$

By comparison of both equations, we get the following relations:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{E^2 - m^2 c^4}{2E} \\ \mu &= \frac{E}{c^2} \\ l' &= \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - Z^2 \alpha^2} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

For the non-relativistic hydrogen atom, we have the following solution for E' :

$$E' = -\frac{Z^2 \alpha^2 \mu c^2}{2n'^2},$$

where n' is the principal quantum number of the non-relativistic hydrogen atom. Now solving for E leads to

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n'^2}}}.$$

Solution

For the non-relativistic hydrogen atom we have the relation $n' = n_r + l'$ with the radial quantum number n_r . This leads to

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{(n_r+l')^2}}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2 - \frac{1}{2}}\right)^2}}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n - l + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2 - \frac{1}{2}}\right)^2}}} \end{aligned}$$

e) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.

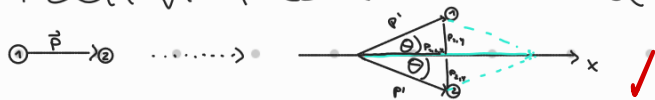
Solution

Calculating the Taylor Series in $Z\alpha$ leads to

$$\begin{aligned} E' &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2 - \frac{1}{2}}\right)^2}}} \\ &= mc^2 - \frac{mc^2}{2(n_r + l)^2}(Z\alpha)^2 - \frac{mc^2(8n_r + 2l - 3)}{8(1 + 2l)(n_r + l)^4}(Z\alpha)^4, \end{aligned}$$

where the first term is the energy of the electron in rest (mass), the second term corresponds to the energy levels of the non-relativistic hydrogen atom and the third term is originating from relativistic corrections.

② Relativistische Kinematik



Das einfallende Teilchen hat den Impuls $p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m^2 c^4}$ ✓

Nach dem Stoß (elastisch) haben beide Teilchen die Energie

$$E' = E + mc^2, \text{ den Impuls } p' = \frac{1}{c} \sqrt{E'^2 - m^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E^2 + 2Emc^2 + m^2 c^4}{4} - \frac{4m^2 c^4}{4}}$$

$$= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E^2 + 2Emc^2 - 3m^2 c^4}{4}} \text{ und bewegen sich mit dem Winkel } \Theta \text{ zur } x\text{-Achse.}$$

Wegen der Symmetrie heben sich die y-Komponenten auf und die x-Komponenten

addieren sich: $p = 2 p_x = 2 p \cos \Theta \Leftrightarrow \cos \Theta = \frac{p}{2 p'}$

$$\Rightarrow \cos \Theta = \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{\sqrt{E^2 + 2Emc^2 - 3m^2 c^4}} = \left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{E^2 + 2Emc^2 - 3m^2 c^4} \right)^{1/2}$$

relativistischer Limit: $E \gg mc^2 \Leftrightarrow \eta := \frac{mc^2}{E} \ll 1$

$$\rightarrow \cos \Theta = \frac{E \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}}{E \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{E} - \frac{3m^2 c^4}{E^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{1 + 2\eta - 3\eta^2}} \rightarrow \text{Taylor-Entwicklung}$$

$$\cos \Theta = 1 + \frac{1}{2} \left(-2\eta (1 + 2\eta - 3\eta^2) + (1 - \eta^2)(-1) (1 + 2\eta - 3\eta^2)^{-2} (2 - 6\eta) \right) \Big|_{\eta=0} \cdot \eta$$

$$1 + \frac{1}{2} (-2\eta) = 1 - \eta = 1 - \frac{mc^2}{E} \quad \checkmark$$

$$\rightarrow \Theta = \arccos \left(1 - \frac{mc^2}{E} \right)$$

kin. Energie ✓ $\frac{E}{mc^2} - 1 \ll 1$

nicht-relativistischer Limit: $(E - mc^2) \ll mc^2 \Leftrightarrow T \ll mc^2 \Leftrightarrow \tau := \frac{T}{mc^2} \ll 1$

$$\cos \Theta = \frac{\sqrt{2mc^2 T + T^2}}{\sqrt{4mc^2 T + T^2}} = \frac{\sqrt{2mc^2 T} \sqrt{1 + \frac{T}{2mc^2}}}{\sqrt{4mc^2 T} \sqrt{1 + \frac{T}{4mc^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{T}{2mc^2}}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{T}{4mc^2}}} \left(= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{T}{2mc^2} \right)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{T}{4mc^2} \right)^{-1/2} \right)$$

$$\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{T}{2mc^2} \right)^{-1/2} \cdot \left(1 + \frac{T}{4mc^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{T}{2mc^2} \right)^{1/2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{T}{4mc^2} \right)^{-3/2} \cdot \frac{1}{4} \right) \Big|_{T=0} \tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \tau \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tau + \mathcal{O}(\tau^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 \frac{\Gamma}{mc^2} + \mathcal{O}(\tau^2)$$

✓ (212)

b) $E = \frac{hc}{\lambda}$

Energieerhaltung:

$$E_e + E_\gamma = E_e' + E_\gamma' \quad \Leftrightarrow \quad E_e' = E_e + E_\gamma - E_\gamma' \quad \checkmark$$

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_\gamma' + \vec{p}_e' \quad \checkmark$$

$$\hookrightarrow (\vec{p}_\gamma - \vec{p}_\gamma')^2 = \vec{p}_\gamma^2 - 2|\vec{p}_\gamma||\vec{p}_\gamma'| \cos\theta + \vec{p}_\gamma'^2 = \vec{p}_e'^2 \quad (1)$$

$$E_\gamma = |\vec{p}_\gamma|c, \quad E_e' = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 \vec{p}_e'^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E_e'^2 - m_e^2 c^4}{c^2} = |\vec{p}_e'|^2$$

Einsetzen in (1):

$$\left(\frac{E_\gamma}{c} \right)^2 - 2 \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} \cos\theta + \left(\frac{E_\gamma'}{c} \right)^2 = \frac{E_e'^2 - m_e^2 c^4}{c^2}$$

$$= \frac{(E_e + E_\gamma - E_\gamma')^2}{c^2} - m_e^2 c^2 = \frac{E_e^2}{c^2} + 2 \frac{E_e(E_\gamma - E_\gamma')}{c^2} + \frac{(E_\gamma - E_\gamma')^2}{c^2} - m_e^2 c^2$$

$$= \frac{2}{c^2} E_e (E_\gamma - E_\gamma') + \frac{E_\gamma^2}{c^2} - \frac{2 E_\gamma E_\gamma'}{c^2} + \frac{E_\gamma'^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow -E_\gamma E_\gamma' \cos\theta = E_e (E_\gamma - E_\gamma') - E_\gamma E_\gamma'$$

$$\Leftrightarrow -\cos\theta = m_e c^2 \frac{(E_\gamma - E_\gamma')}{E_\gamma E_\gamma'} - 1 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos\theta = m_e c^2 \left(\frac{1}{E_{yi}} - \frac{1}{E_f} \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos\theta = m_e c^2 \left(\frac{\lambda'}{hc} - \frac{\lambda}{hc} \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos\theta = \frac{m_e c}{h} (\lambda' - \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) // \checkmark$$

Grenzfall $\theta \approx \pi$:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \overset{=-1}{\cos(\pi)})$$

$$= \lambda + \frac{2h}{m_e c} \text{ (maximale Verschiebung)} // \checkmark$$

$$E \gg m_e c^2 \Leftrightarrow \frac{hc}{\lambda} \gg m_e c^2 \Leftrightarrow \lambda \ll \frac{h}{m_e c}$$

$$\hookrightarrow \lambda' \approx \frac{2h}{m_e c} // \checkmark \quad (2/2) \quad (4/4)$$

④ Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld:

$$a) E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \quad (1) // \checkmark$$

Kopplung ans elektromagnetische Feld:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q \vec{A} = -i\hbar \vec{\nabla} - q \vec{A} // \checkmark$$

$$i\hbar \partial_t \rightarrow i\hbar \partial_t - q\phi \quad \leftrightarrow \quad \epsilon \rightarrow \epsilon - q\phi // \checkmark$$

Einsetzen in (1) liefert

$$(i\hbar \partial_t - q\phi)^2 = m^2 c^4 + (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A})^2 c^2 // \checkmark$$

(Klein-Gordon-Gleichung für ein freies rel. Teilchen:

$$(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \psi = 0$$

b) mit der KGG aus a):

$$(i\hbar \partial_t - q\phi)^2 \psi = m^2 c^4 \psi + c^2 (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A})^2 \psi \quad |(\cdot)^*$$

$$(-i\hbar \partial_t - q\phi)^2 \psi^* = m^2 c^4 \psi^* + c^2 (i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A})^2 \psi^*$$

Es ist zu zeigen, dass ψ^* ein Teilchen entgegengesetzter Ladung beschreibt.
 Substituiert man $-q = \tilde{q}$, so wird diese Beziehung deutlich:

$$(-i\hbar \partial_t + \tilde{q}\phi)^2 \psi^* = m^2 c^4 \psi^* + c^2 (i\hbar \vec{\nabla} + \tilde{q}\vec{A})^2 \psi^*$$

$$\Leftrightarrow (i\hbar \partial_t - \tilde{q}\phi)^2 \psi^* = m^2 c^4 \psi^* + c^2 (-i\hbar \vec{\nabla} - \tilde{q}\vec{A})^2 \psi^*$$

c) $e\phi(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ mit $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$

Separationsansatz: $\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$

KGG: $(i\hbar \partial_t - q\phi)^2 \psi = m^2 c^4 \psi + c^2 (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A})^2 \psi$

→ einsetzen des Separationsansatzes und $q = e, \vec{A} = 0$ (Coulomb-Potential)

$$\Leftrightarrow (i\hbar \partial_t - e\phi(r))^2 u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} = m^2 c^4 u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} + c^2 (-i\hbar \vec{\nabla})^2 u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Leftrightarrow (-\hbar^2 \partial_t^2 - 2i\hbar e\phi(r) \partial_t + e^2 \phi^2(r)) u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} = m^2 c^4 u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} + c^2 (-\hbar^2 \Delta) u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Leftrightarrow -\hbar^2 \left(-\frac{iE}{\hbar}\right)^2 u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} - 2i\hbar e\phi(r) \left(-\frac{iE}{\hbar}\right) u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} + e^2 \phi^2(r) u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} = m^2 c^4 u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} - c^2 \hbar^2 \Delta u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Leftrightarrow E^2 u(\vec{r}) - 2eE\phi(r) u(\vec{r}) + e^2 \phi^2(r) u(\vec{r}) = m^2 c^4 u(\vec{r}) - c^2 \hbar^2 \Delta u(\vec{r})$$

$$\Leftrightarrow (-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4) u(\vec{r}) = (E - e\phi(r))^2 u(\vec{r})$$

d)
$$E_{n,l} = \frac{m c^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-\frac{1}{2} + [(l+\frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2]^{\frac{1}{2}})^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Ansatz $\psi(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ✓

$$\begin{aligned} \hookrightarrow -\hbar^2 c^2 \Delta (Y_{lm}(\theta, \varphi) R_{nl}(r) + m^2 c^4 R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ = E^2 R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) - 2eE \phi(r) R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ + e^2 \phi^2(r) R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Δ in Kugelkoordinaten:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad \checkmark$$

$$\phi(r) = -\frac{Ze\hbar c}{r}$$

→ Radialteil:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 c^2 \left(\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r R(r)) \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) + m^2 c^4 R(r) = E^2 R(r) \\ + 2E \frac{Ze\hbar c}{r} R(r) - \left(\frac{Ze\hbar c}{r} \right)^2 R(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c^2 \hbar^2 \left(-\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) \\ = \left(-m^2 c^4 + \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right)^2 \right) R(r) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Nicht-relativistisch:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = \left(E' + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R(r)$$

Zum Vergleich schreibe ich den relativistischen Term in die gleiche Form, wie der nicht-relativistische:

$$\hbar^2 c^2 \left(-\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} R(r)$$

$$= \left(E^2 + \frac{eZe^2}{2\pi\epsilon_0 r} - m^2 c^4 + \left(\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 \right) R(r)$$

$$\Leftrightarrow \hbar^2 c^2 \left(-\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 \right) R(r) \\ = \left(E^2 + \frac{eZe^2}{2\pi\epsilon_0 r} - m^2 c^4 \right) R(r) \quad | \cdot \frac{1}{2E}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2 c^2}{2E} \left(-\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{l(l+1) - Z^2 \alpha^2}{r^2} \right) R(r) \\ = \left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{2E} + \frac{Ze}{r} \right) R(r) \quad \checkmark$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$n^1 = \frac{E}{c^2}, \quad e^1 = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2E}, \quad l^1 = \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - Z^2 \alpha^2} - \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

NR:

$$l^1 (l^1 + 1) = l(l+1) - Z^2 \alpha^2$$

$$l'^2 + l' = l^2 + l - Z^2 \alpha^2$$

$$l'^2 + l' - l^2 - l + Z^2 \alpha^2 = 0$$

$$l'_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + l^2 - l + Z^2 \alpha^2}$$

Die Energie des nicht-rel. Wasserstoffatoms ist bekannt:

$$e^1 = \frac{-Z^2 \alpha^2 m c^2}{2n^1{}^2} = \frac{-Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{2n^1{}^2} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2E}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-Z^2 \alpha^2 E^2}{n^1{}^2} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2E}$$

$$\Leftrightarrow E^2 \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^1{}^2} \right) = m^2 c^4 \Rightarrow E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^1{}^2}}}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{z^2 \alpha^2}{(n_r + l')^2}}} \quad \left(\text{mit } n' = n_r + l' \right)$$

woher soll man das wissen?

$$\Leftrightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{z^2 \alpha^2}{\left(n + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - z^2 \alpha^2} - \frac{1}{2} \right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow E_n = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{z^2 \alpha^2}{\left(n - l + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - z^2 \alpha^2} - \frac{1}{2} \right)^2}}$$

e) Taylorentwicklung um $z\alpha := \varepsilon$

$$E_n = mc^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\left(n - l + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= mc^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2 \left(n - l - \frac{1}{2} + l + \frac{1}{2} \right)^2} + \frac{\varepsilon^4 \left(-4 \left(n - l - \frac{1}{2} \right) - l - \frac{1}{2} \right)}{8 \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(n - l - \frac{1}{2} + l + \frac{1}{2} \right)^4} + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \right)$$

$$= mc^2 \left(1 - \frac{(z\alpha)^2}{2n^2} + \frac{(z\alpha)^4 \left(-4n + 4l + 2 - l - \frac{1}{2} \right)}{8 \left(l + \frac{1}{2} \right) n^4} + \mathcal{O}((z\alpha)^6) \right)$$

$$= mc^2 \left(1 - \frac{(z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{(z\alpha)^4 \left(4n - 3l + \frac{3}{2} \right)}{8 \left(l + \frac{1}{2} \right) n^4} + \mathcal{O}((z\alpha)^6) \right)$$

$$= mc^2 \left(1 - \frac{(z\alpha)^2}{2(n_r - l)^2} - \frac{(z\alpha)^4 (8n - 6l - 3)}{8(2l + 1)n^4} \right)$$

✓ (516)

Σ(10110) ☺

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 6

Abgabe: 05.12.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 09.12.2025

Aufgabe 1: (*) Eichinvarianz Dirac-Gleichung (5 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator der Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld und zeigen Sie, dass die Dirac-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned}\vec{A} \rightarrow \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \\ \Phi \rightarrow \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \\ \Psi \rightarrow \Psi' &= \Psi \exp(ie\Lambda/\hbar),\end{aligned}$$

wobei \vec{A} das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. \vec{A} , Φ und Λ sind Funktionen von \vec{r} und t . ($-e$) ist die Ladung des Elektrons.

Solution

Similar to the last exercise sheet we have

$$\begin{aligned}0 &= i\hbar\partial_t\Psi' - \left[c\vec{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}' \right) + \beta mc^2 + e\Phi' \right] \Psi' \\ &= e^{ie\Lambda/\hbar} \left\{ i\hbar\partial_t\Psi - \left[c\vec{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + \beta mc^2 + e\Phi \right] \Psi \right\},\end{aligned}$$

where we used

$$(i\hbar\partial_t - e\Phi') e^{ie\Lambda/\hbar}\Psi = e^{ie\Lambda/\hbar} (i\hbar\partial_t - e\Phi)\Psi$$

and

$$\left[c\vec{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}' \right) \right] e^{ie\Lambda/\hbar}\Psi = e^{ie\Lambda/\hbar} \left[c\vec{\alpha} \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) \right] \Psi.$$

Aufgabe 2: $Z \rightarrow \tau^+\tau^-$

Ein ruhendes Z -Boson der Masse $M_Z = 91.1887 \text{ GeV}/c^2$ zerfällt in ein $\tau^+\tau^-$ -Paar ($m_{\tau^\pm} = 1.7771 \text{ GeV}/c^2$).

a) Berechnen Sie die Energie und den Impuls der Zerfallsprodukte (in GeV bzw. GeV/c).

Solution

Let p_1^μ , p_2^μ and p_3^μ be the 4-momenta of the Z-Boson and the taus. We start with the Z-Boson mass at rest, which translates to

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} M_Z c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Momentum and energy conservation implies

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} M_Z c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p_2^\mu + p_3^\mu = \begin{pmatrix} M_Z c/2 \\ 0 \\ 0 \\ -|\vec{p}| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_Z c/2 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{p}| \end{pmatrix},$$

where we chose $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$ w.l.o.g. The energy of the τ is therefore given by

$$E_\tau = M_Z c^2/2 = 45.5944 \text{ GeV}$$

and its momentum can be calculated using the energy momentum relation $E^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2$:

$$|\vec{p}| = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{M_Z c^4}{4} - m_\tau^2 c^4} = 45.5597 \text{ GeV}/c$$

- b) Die mittlere Lebensdauer ruhender τ -Leptonen beträgt $2.956 \cdot 10^{-13} \text{ s}$. Wie weit kommen die τ -Leptonen im Mittel?

Solution

We know the lifetime of the τ in its restframe and want to calculate the lifetime in the restframe of the Z . We therefore need to find the Lorentz transformation to switch between both. We can calculate the corresponding γ using

$$E_\tau = M_z c^2 / 2 = \gamma m_\tau c^2 \\ \rightarrow \gamma = \frac{M_z}{2m_\tau} = 25.6566$$

With γ we can also calculate β using

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.99924$$

As a last step we have to transform to the restframe of the Z which means

$$\begin{pmatrix} T'_\tau c \\ 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_\tau c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma T_\tau c \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta T_\tau c \end{pmatrix}.$$

We finally find

$$z = \gamma\beta T_\tau c = 0.00227193\text{m}$$

Aufgabe 3: (*) Gamma-Matrizen (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

a) Die Gamma-Matrizen genügen der Dirac-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

Sie haben in der Dirac-Darstellung folgende Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ_i , $i = 1, 2, 3$ die Pauli Matrizen bezeichnen.

Berechnen Sie die Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

in der Dirac-Darstellung.

Solution

We have for $i = 1, 2, 3$

$$\sigma_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{0i} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{i0} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = -2i(g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\omega} - g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\omega} - g_{\mu\omega}\sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\omega}\sigma_{\mu\rho}).$$

Solution

We have

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = \frac{i}{2} \left([\gamma_\rho, [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\omega]] - [\gamma_\omega, [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\rho]] \right)$$

Then we can derive

$$[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\omega] = 2i(g_{\omega\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\omega}\gamma_\nu).$$

Finally we have

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = 2i(g_{\omega\nu}\sigma_{\rho\mu} - g_{\mu\omega}\sigma_{\rho\nu} - g_{\rho\nu}\sigma_{\omega\nu} + g_{\mu\rho}\sigma_{\omega\nu}).$$

c) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} \not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} &= 2A \cdot B, & \gamma^\nu \not{A} + \not{A}\gamma^\nu &= 2A^\nu, \\ \gamma^\nu \not{A}\gamma_\nu &= -2\not{A}, & \gamma^\nu \not{A}\not{B}\gamma_\nu &= 4A \cdot B, \end{aligned}$$

wobei A und B Vierervektoren sind und die Notation $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$ verwendet wurde.

Hinweis: Für Aufgabenteil (b) und (c) soll keine explizite Darstellung der Gamma-Matrizen verwendet werden.

Solution

We can show that

$$\begin{aligned} \not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} &= A_\mu B_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2A_\mu B_\nu g^{\mu\nu} = 2A \cdot B, \\ \gamma^\nu \not{A} + \not{A}\gamma^\nu &= A_\mu (\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2A_\mu g^{\mu\nu} = 2A^\nu, \\ \gamma^\nu \not{A}\gamma_\nu &= A_\mu (\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu) = \dots = -2\not{A}, \\ \gamma^\nu \not{A}\not{B}\gamma_\nu &= A_\rho B_\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\nu = A_\rho B_\sigma (\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} \gamma^\sigma \gamma_\nu - \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\nu) \\ &= \dots = 4A \cdot B. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Rechnen mit natürlichen Einheiten

In der Teilchenphysik rechnet man in einem Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. Das bedeutet, dass Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit und Wirkungen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums dividiert durch 2π angegeben werden.

a) Welche Beziehungen folgen daraus zwischen den Einheiten Meter, Sekunde und MeV?

Hinweis: $c = 299\,792\,458$ m/s und $\hbar = 6,582\,119 \cdot 10^{-22}$ MeV s.

Solution

$$1\text{s}^{-1} = 6.582\,119 \times 10^{-22} \text{ MeV}.$$

$$1m = 1.973 \times 10^{-13} \text{ MeV}$$

b) Welcher Masse in Kilogramm entspricht 1 MeV?

Hinweis: $1 \text{ eV} = 1,602\,176 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Solution

$$1 \frac{\text{MeV}}{c^2} = \frac{10^6 \times 1.602\,176 \times 10^{-19} \text{ Js}^2}{(299\,792\,458)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 1.78 \times 10^{-30} \text{ kg},$$

c) Drücken Sie die inverse Pionenmasse ($m_\pi = 140 \text{ MeV}$) in fm($= 10^{-15} \text{ m}$) aus.

Solution

$$\frac{1}{140\text{MeV}} = \frac{1}{140\text{MeV}} \times 6.582\,119 \times 10^{-22} \text{ MeV s} \times 299\,792\,458 \text{ m/s} = 1.41 \text{ fm}$$

d) Das Z-Boson hat etwa eine Breite von 2.50 GeV. Wie lange ist die Lebensdauer des Z-Bosons in Sekunden?

Solution

$$\tau_Z = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.582\,119 \times 10^{-22} \text{ MeV s}}{2.50 \text{ GeV}} = 2.63 \times 10^{-25} \text{ s}.$$

① Eichinvarianz der Dirac-Gleichung

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \rightarrow A = \vec{A}' - \vec{\nabla}\Lambda$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \partial_t \Lambda \rightarrow \phi = \phi' + \partial_t \Lambda$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi \exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right) \rightarrow \psi = \psi' \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right)$$

Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld:

$$[c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + \beta mc^2] \psi = (i\hbar\partial_t - e\phi)\psi \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow [c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + \beta mc^2 + e\phi] \psi = i\hbar\partial_t \psi \quad \checkmark$$

$$\rightarrow [c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e(\vec{A}' - \vec{\nabla}\Lambda)\right) + \beta mc^2 + e(\phi' + \partial_t \Lambda)] \psi' \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right) = i\hbar\partial_t (\psi' \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right)) \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow [c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}' + e\vec{\nabla}\Lambda\right) + \beta mc^2 + e\phi' + \cancel{e(\partial_t \Lambda)}] \psi' \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right) = i\hbar\partial_t (\psi' \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right)) + i\hbar\psi' (\partial_t \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right)) = i\hbar(\partial_t \psi') \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right) + e\psi' \cancel{\partial_t \Lambda} \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right)$$

$$\Leftrightarrow c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}(\psi' \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right)) + [c\vec{\alpha}(-e\vec{A}' + e\vec{\nabla}\Lambda) + \beta mc^2 + e\phi'] \psi' \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right) = c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}[(\vec{\nabla}\psi') \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right) - \frac{ie}{\hbar}\psi'(\vec{\nabla}\Lambda) \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right)] + \quad \text{"}$$

$$\Leftrightarrow c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}\psi') \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right) - e\psi'(\vec{\nabla}\Lambda) + e\vec{\nabla}\Lambda\psi' + (-\cancel{e\vec{\alpha}\vec{A}'} + \beta mc^2 + e\phi') \psi' \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right) = i\hbar(\partial_t \psi') \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar}\right)$$

$$\Leftrightarrow [c\vec{\alpha}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}'\right) + \beta mc^2 + e\phi'] \psi' = i\hbar\partial_t \psi' \quad \checkmark \quad \Sigma(515)$$

③ a) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{Pauli-Matrizen mit } j = 1, 2, 3$$

ges.: $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

$$\sigma_{00} = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad \checkmark$$

$$\sigma_{ij} = \frac{i}{2} [\gamma_i, \gamma_j] = \frac{i}{2} (2\gamma_i \gamma_j - \{\gamma_i, \gamma_j\}) = i\gamma_i \gamma_j - i g_{ij} \mathbb{1}_{4 \times 4}$$

$$\sigma_{i0} = i\gamma_i \gamma_0 - \underbrace{i g_{i0} \mathbb{1}_{4 \times 4}}_{=0 (i \neq 0)} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\sigma_{0i} = i\gamma_0 \gamma_i - \underbrace{i g_{0i} \mathbb{1}_{4 \times 4}}_{=0 (i \neq 0)} = i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$i, j = 1, 2, 3: \sigma_{ij} = \gamma_i \gamma_j - \underbrace{i g_{ij} \mathbb{1}_{4 \times 4}}_{=0 \text{ für } i \neq j}$$

$$= i \gamma_i \gamma_j = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\sigma_i \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i \sigma_j \end{pmatrix}$$

$$= i \begin{pmatrix} -i \varepsilon_{ijk} \sigma_k & 0 \\ 0 & -i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \sigma_0 + i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad \checkmark$$

$$b) \text{ zz: } [\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = -2i (g_{\mu\rho} \sigma_{\nu\omega} - g_{\nu\rho} \sigma_{\mu\omega} - g_{\mu\omega} \sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\omega} \sigma_{\mu\rho})$$

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = [\sigma_{\mu\nu}, \frac{i}{2} [\gamma_\rho, \gamma_\omega]] = \frac{i}{2} (\sigma_{\mu\nu} [\gamma_\rho, \gamma_\omega] - [\gamma_\rho, \gamma_\omega] \sigma_{\mu\nu})$$

$$= \frac{i}{2} (\sigma_{\mu\nu} (\gamma_\rho \gamma_\omega - \gamma_\omega \gamma_\rho) - (\gamma_\rho \gamma_\omega - \gamma_\omega \gamma_\rho) \sigma_{\mu\nu})$$

$$= \frac{i}{2} (\sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho \gamma_\omega - \sigma_{\mu\nu} \gamma_\omega \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma_\omega \sigma_{\mu\nu} + \gamma_\omega \gamma_\rho \sigma_{\mu\nu})$$

$$= \frac{i}{2} ([\gamma_\rho, [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\omega]] - [\gamma_\omega, [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\rho]])$$

$$= \frac{i}{2} ([\gamma_\mu \gamma_\nu, \gamma_\omega] - [\gamma_\omega, \gamma_\mu \gamma_\nu])$$

$$= \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\omega - \gamma_\omega \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\omega + \gamma_\omega \gamma_\nu \gamma_\mu)$$

$$= \frac{i}{2} (\gamma_\mu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\omega\} - \{\gamma^\omega, \gamma^\mu\} \gamma^\nu + \{\gamma^\omega, \gamma^\nu\} \gamma_\mu)$$

$$= \frac{i}{2} (\gamma_\mu 2g_{\mu\nu} \mathbb{1} - \gamma^\nu 2g_{\mu\omega} \mathbb{1} - 2g_{\omega\mu} \mathbb{1} \gamma^\nu + 2g_{\omega\nu} \mathbb{1} \gamma_\mu)$$

$$= \frac{i}{2} (4g_{\omega\nu} \gamma_\mu - 4g_{\mu\omega} \gamma^\nu)$$

$$= 2i (g_{\omega\nu} \gamma_\mu - g_{\mu\omega} \gamma^\nu) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = 2i (g_{\rho\nu} \gamma_\mu - g_{\mu\rho} \gamma_\nu)$$

$$\Rightarrow \frac{i}{2} ([\gamma_\rho, [\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\omega]] - [\gamma^\omega, [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\rho]])$$

$$= \frac{i}{2} (2i [\gamma_\rho, (g_{\omega\nu} \gamma_\mu - g_{\mu\omega} \gamma^\nu)] - 2i [\gamma^\omega, (g_{\rho\nu} \gamma_\mu - g_{\mu\rho} \gamma^\nu)])$$

$$= - (g_{\omega\nu} [\gamma_\rho, \gamma_\mu] - g_{\mu\omega} [\gamma_\rho, \gamma^\nu] - g_{\rho\nu} [\gamma^\omega, \gamma_\mu] + g_{\mu\rho} [\gamma^\omega, \gamma^\nu])$$

$$= 2i (g_{\omega\nu} \sigma_{\rho\mu} - g_{\mu\omega} \sigma_{\rho\nu} - g_{\rho\nu} \sigma_{\omega\mu} + g_{\mu\rho} \sigma_{\omega\nu})$$

$$= -2i (g_{\omega\nu} \sigma_{\rho\mu} - g_{\mu\omega} \sigma_{\rho\nu} - g_{\rho\nu} \sigma_{\mu\omega} + g_{\mu\rho} \sigma_{\nu\omega}) \quad \checkmark$$

c) zz: (1) $\not{A} \not{B} + \not{B} \not{A} = 2A \cdot B$, (2) $\gamma^\nu \not{A} + \not{A} \gamma^\nu = 2A^\nu$

(3) $\gamma^\nu \not{A} \gamma_\nu = -2\not{A}$, (4) $\gamma^\nu \not{A} \not{B} \gamma_\nu = 4A \cdot B$

mit $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$, $\not{B} = B_\nu \gamma^\nu$

(1): $A_\mu \gamma^\mu B_\nu \gamma^\nu + B_\nu \gamma^\nu A_\mu \gamma^\mu = \{A_\mu \gamma^\mu, B_\nu \gamma^\nu\}$

$$= A_\mu B_\nu \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = A_\mu B_\nu 2g^{\mu\nu} = 2A^\mu B_\mu = 2A \cdot B \quad \checkmark$$

(2): $\gamma^\nu A_\mu \gamma^\mu + A_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu = \{ \gamma^\nu, A_\mu \gamma^\mu \} = A_\mu \{ \gamma^\nu, \gamma^\mu \}$

$$= A_\mu 2g^{\mu\nu} = 2A^\nu \quad \checkmark$$

$$(3): \gamma^\nu A_\mu \gamma^\mu \gamma_\nu$$

$$= \left\{ \sum \gamma^\nu, A_\mu \gamma^\mu \right\} \gamma_\nu - A_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\nu \quad \checkmark$$

$$= A_\mu 2g^{\mu\nu} \gamma_\nu - A_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu g_{\nu\rho} \gamma^\rho$$

$$= A_\mu \left(2g^{\mu\nu} \gamma_\nu - \gamma^\mu \frac{1}{2} (g_{\nu\rho} + g_{\rho\nu}) \gamma^\nu \gamma^\rho \right)$$

$$= A_\mu \left(2g^{\mu\nu} \gamma_\nu - \gamma^\mu \cdot \frac{1}{2} (g_{\nu\rho} \gamma^\nu \gamma^\rho + g_{\rho\nu} \gamma^\nu \gamma^\rho) \right)$$

$$= A_\mu \left(2g^{\mu\nu} \gamma_\nu - \gamma^\mu \frac{1}{2} (g_{\nu\rho} \gamma^\nu \gamma^\rho + g_{\nu\rho} \gamma^\rho \gamma^\nu) \right)$$

$$= A_\mu \left(2g^{\mu\nu} \gamma_\nu - \gamma^\mu \frac{1}{2} g_{\nu\rho} \{ \gamma^\nu, \gamma^\rho \} \right)$$

$$= A_\mu \left(2g^{\mu\nu} \gamma_\nu - \gamma^\mu \frac{1}{2} g_{\nu\rho} \cdot 2g^{\nu\rho} \right)$$

$$= A_\mu \left(2g^{\mu\nu} \gamma_\nu - \gamma^\mu \cdot 4 \right)$$

$$= A_\mu \left(2\gamma^\mu - 4\gamma^\mu \right) = -2A_\mu \gamma^\mu = -2A \quad \checkmark$$

$$(4): \gamma^\nu \cancel{A} \cancel{B} \gamma_\nu = \gamma^\nu A_\mu \gamma^\mu B_\rho \gamma^\rho \gamma_\nu$$

$$= \left(\sum \gamma^\nu, A_\mu \gamma^\mu \right) B_\rho \gamma^\rho \gamma_\nu$$

$$= \left(A_\mu 2g^{\mu\nu} - A_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \right) B_\rho \gamma^\rho \gamma_\nu$$

$$= A_\mu 2g^{\mu\nu} B_\rho \gamma^\rho \gamma_\nu - A_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \underbrace{B_\rho \gamma^\rho \gamma_\nu}$$

$$= 2A_\mu B_\rho \gamma^\rho \gamma^\mu - A_\mu \gamma^\mu \left(\sum \gamma^\nu, B_\rho \gamma^\rho \right) \gamma_\nu - B_\rho \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\nu$$

$$\begin{aligned}
&= 2A_\mu B_\rho \gamma^\rho \gamma^\mu - A_\mu \gamma^\mu (B_\rho 2g^{\rho\sigma} \gamma_\sigma - B_\rho \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\nu) \\
&= 2A_\mu B_\rho \gamma^\rho \gamma^\mu - 2A_\mu B_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho + A_\mu \gamma^\mu \underbrace{B_\rho \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\nu}_{=4} \\
&= 2A_\mu B_\rho \gamma^\rho \gamma^\mu - 2A_\mu B_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho + 4A_\mu B_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho \\
&= 2A_\mu B_\rho \{ \gamma^\rho, \gamma^\mu \} = 4A_\mu B_\rho g^{\rho\mu} = 4A_\mu B^\mu = 4A \cdot B
\end{aligned}$$

Σ(515)

Σ(101107) ☺

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 7

Abgabe: 12.12.2025, 11:30 Uhr; Besprechung: 16.12.2025

Aufgabe 1: Stromerhaltung

Ψ sei eine Lösung der Dirac-Gleichung für ein Teilchen der Masse m und Ladung q in einem äußeren elektromagnetischen Feld

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi = 0.$$

a) Welcher Gleichung genügt $\bar{\Psi}$?

Solution

We compute first the hermitian conjugate of the Dirac equation

$$([\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi)^\dagger = \Psi^\dagger [\gamma^\mu (i\overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m]^\dagger$$

Next, we multiply this equation with γ^0 from the right

$$\Psi^\dagger [\gamma^\mu (i\overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m]^\dagger \gamma^0 = -\bar{\Psi} [i\gamma^\mu (\overleftarrow{\partial}_\mu + qA_\mu) + m] = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass der Dirac-Strom $j^\mu = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ erhalten ist.

Solution

By using the Dirac equation we obtain

$$\partial_\mu j^\mu = \left(\bar{\Psi} i \overleftarrow{\not{\partial}} \right) \Psi + \bar{\Psi} (i \not{\partial} \Psi) = [\bar{\Psi} (-q\not{A} - m)] \Psi + \bar{\Psi} [(q\not{A} + m) \Psi] = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen auch die Klein-Gordon-Gleichung $((\square + m^2)\Psi = 0)$ erfüllen.

Solution

We consider first

$$0 = (i\rlap{/}{D} - m)[i\rlap{/}{D} - m]\Psi = [-\rlap{/}{D}^2 - 2mi\rlap{/}{D} + m^2]\Psi.$$

Next we simplify

$$\rlap{/}{D}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2}([\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) \partial_\mu \partial_\nu = 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \square,$$

where the term with the commutator vanishes due to antisymmetry, and

$$-2mi\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = -2m^2 \Psi.$$

So that in total we have

$$0 = [-\square - 2m^2 + m^2]\Psi = -[\square + m^2]\Psi.$$

- d) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes folgender Gleichung

$$[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu) + \frac{1}{2}q\sigma^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + m^2]\Psi = 0$$

genügt, wobei $F_{\lambda\mu}$ der Feldstärke-Tensor ist.

Solution

With $D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$ we can write the Dirac equation as

$$(i\rlap{/}{D} - m)\Psi = 0.$$

Next we multiply $(-i\rlap{/}{D} - m)$ from the left and get

$$(-i\rlap{/}{D} - m)(i\rlap{/}{D} - m)\Psi = (\rlap{/}{D}\rlap{/}{D} + m^2)\Psi = (D^2 - i\sigma^{\mu\nu}D_\mu D_\nu + m^2)\Psi = 0,$$

where in the last step we used $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$. The middle term can be further simplified as

$$-i\sigma^{\mu\nu}D_\mu D_\nu \Psi = \frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi.$$

Aufgabe 2: Dirac-Spinoren und räumliche Drehungen

D_z sei die dreidimensionale Drehmatrix für die Drehung um den Winkel ϕ um die z -Achse und S_R die entsprechende Drehung der Spinoren.

- a) Zeigen Sie, dass die Transformationsmatrix S_R in folgender Form geschrieben werden kann

$$S_R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Solution

The rotation matrix is given by

$$S_R = \exp\left(\frac{i}{2}\phi\sigma_{12}\right),$$

with

$$\sigma_{12} = \frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{i}{2}(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1) = i\gamma_1\gamma_2 \quad \text{and} \quad \sigma_{12}^2 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_2 = \gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2 = 1.$$

Next we calculate

$$S_R = \exp\left(\frac{i}{2}\phi\sigma_{12}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\phi\sigma_{12}}{2}\right)^n = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass $S_R^{-1}\gamma_j S_R = (D_z)_{ji}\gamma_i$ gilt.

Solution

The three-dimensional rotation matrix D_z is given by

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We calculate

$$\begin{aligned} S_R^{-1}\gamma_j S_R &= \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\sigma_{12} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \gamma_j \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \gamma_j + i[\gamma_j, \sigma_{12}] \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \sigma_{12} \gamma_j \sigma_{12}. \end{aligned}$$

The two products of gamma matrices can be simplified as

$$[\gamma_j, \sigma_{12}] = 2i(g_{j1}\gamma_2 - g_{j2}\gamma_1),$$

and

$$\sigma_{12} \gamma_j \sigma_{12} = \gamma_j + 2(g_{j1}\gamma_1 + g_{j2}\gamma_2).$$

Lastly we calculate explicitly the expression for the different values of j

$$S_R^{-1}\gamma_1 S_R = \gamma_1 \left[\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] + 2\gamma_2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \gamma_1 \cos(\phi) + \gamma_2 \sin(\phi)$$

$$S_R^{-1}\gamma_2 S_R = \dots = \gamma_2 \cos(\phi) - \gamma_1 \sin(\phi)$$

$$S_R^{-1}\gamma_3 S_R = \dots = \gamma_3$$

Aufgabe 3: (*) Pauli-Gleichung und Spin-Bahn-Kopplung (2+2+1 = 5 Punkte)

Um die Pauli-Gleichung aus der Dirac-Gleichung abzuleiten wird diese im nichtrelativistischen

Limes betrachtet. Dabei erhält man die Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + q\Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit den zweikomponentigen Spinoren φ und χ . Um die Pauli-Gleichung zu erhalten kann nun die untere Komponente dieser Gleichung für $|i\hbar\partial_t\chi|, |q\Phi\chi| \ll |mc^2\chi|$ betrachtet werden, was dem nicht-relativistischen Limes entspricht. Diese Annahme führt zu folgender Beziehung zwischen φ und χ

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})}{2mc^2} \varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}, \frac{q\Phi}{2mc^2}\right), \quad (2)$$

die in die obere Komponente von Gleichung (1) eingesetzt werden kann (siehe Vorlesung).

- a)** Leiten Sie eine Relation zwischen φ und χ analog zu Gleichung (2) her. Berücksichtigen Sie hierbei zusätzlich Terme in erster Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{q\Phi}{2mc^2}\right)$. Nehmen Sie dafür wie oben $|i\hbar\partial_t\chi| \ll |mc^2\chi|$ an und entwickeln Sie den resultierenden Ausdruck für χ in $\frac{q\Phi}{2mc^2}$.

Solution

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi &= c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \varphi + q\Phi\chi - 2mc^2\chi. \\ \rightarrow (2mc^2 - q\Phi) \chi &= c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}\right) \\ \chi &= \frac{1}{2mc} \left(1 + \frac{q\Phi}{2mc^2}\right) \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \varphi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar\partial_t\chi}{2mc^2}, \frac{q^2\Phi^2}{4m^2c^4}\right). \end{aligned}$$

- b)** Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall $\vec{A} = 0$. Setzen Sie nun den in Teilaufgabe (a) gefundenen Ausdruck für χ in die obere Komponente von Gleichung (1) ein. Hierbei tritt ein Term der Form

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Phi(\vec{r}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p}$$

auf. Formen Sie diesen Term um, indem Sie den Impulsoperator nach rechts durchkommutieren und die entstehenden Ausdrücke vereinfachen. Beachten Sie, dass der Impulsoperator \vec{p} die räumliche Ableitung enthält. Wie lautet die resultierende Gleichung für φ ?

Solution

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi &= \left(\frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left(1 + \frac{q\Phi}{2mc^2} \right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + q\Phi \right) \varphi \\ &= \left(\frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 + \frac{q}{4m^2 c^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \Phi (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + q\Phi \right) \varphi. \end{aligned}$$

Now we can use the relation

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

and simplify the expression as

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \Phi(r) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = -i\hbar (\vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{p} + \hbar \vec{\sigma} \cdot ((\vec{\nabla} \Phi) \times \vec{p}) + \Phi p^2.$$

The differential equations is then given by

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{4m^2 c^2} \left(-i\hbar (\vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{p} + \hbar \vec{\sigma} \cdot ((\vec{\nabla} \Phi) \times \vec{p}) + \Phi p^2 \right) + q\Phi \right) \varphi.$$

- c) Wir betrachten nun den Fall $q = -e$, $\Phi = \Phi(r)$ und $\vec{A} = 0$, was beispielsweise einem Elektron im Wasserstoffatom entspricht. Identifizieren Sie in ihrem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe den Drehimpulsoperator. Wie sieht der Term des Hamiltonoperators aus, der diesen Operator enthält? Was bedeutet dieser Term physikalisch?

Solution

The potential depends only on r , so that we can write

$$\vec{\nabla} \Phi(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr} \vec{e}_r = \frac{1}{r} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right) \vec{r}.$$

The relevant term can be rewritten as

$$-\frac{e}{4m^2 c^2} \hbar \vec{\sigma} \cdot ((\vec{\nabla} \Phi) \times \vec{p}) = -\frac{e\hbar}{4m^2 c^2 r} \vec{\sigma} \cdot \left(\frac{d\Phi}{dr} \right) \vec{r} \times \vec{p} = -\frac{e\hbar}{2m^2 c^2 r} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right) \vec{S} \cdot \vec{L},$$

which leads to a degeneration of energy levels with the same quantum number n but different quantum numbers l in the hydrogen atom.

Aufgabe 4: (*) Nicht-relativistischer Limes für bilineare Kovarianten (5 Punkte)

Bestimmen Sie das führende Verhalten in v/c der bilinearen Kovarianten $\bar{u}\Gamma u$

(mit $\Gamma \in \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^\mu \gamma^5\}$), wobei u eine Lösung der freien Dirac-Gleichung zum Impuls p^μ ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass die beiden unteren Komponenten von u von der Ordnung v/c relativ zu den oberen sind.

Solution

The solution of the Dirac equation is given by

$$u = N \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad N = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}},$$

and we have to consider the following objects

$$\bar{u} \Gamma u = u^\dagger \gamma_0 \Gamma u = N^2 \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \chi_s \end{pmatrix}^\dagger \gamma_0 \Gamma \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \chi_s \end{pmatrix},$$

where Γ is one of the following matrices

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_0 \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^i \gamma_5 &= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \\ \sigma^{0i} &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^{i0} &= -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^{ij} &= \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution

For taking the non-relativistic limit we have to rewrite p_0 in terms of $|\vec{p}|^2$ and m^2 and expand it in the limit $|\vec{p}|^2 \ll m^2$

$$p_0 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} = m\sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}} = m \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right) \right).$$

The expansion of the overall normalization factor N^2 is given by

$$N^2 = \frac{p_0 + m}{2m} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}} \right) = 1 + \frac{1}{4} \frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right),$$

and the expansion of the only denominator reads

$$\frac{1}{p_0 + m} = \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right) \right).$$

Now we can expand all scalar products, where we also need the relation

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) = p^i p^j \sigma^i \sigma^j = p^i p^j (\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k) = p^i p^i = |\vec{p}|^2.$$

We get for the first two scalar products

$$\begin{aligned} \bar{u} \mathbb{1} u &= N^2 \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0 + m)^2} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{4} \frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right) \right) \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{4m^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^2}{m^2}\right) \right) \right) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right), \end{aligned}$$

and

$$\bar{u} \gamma_0 u = N^2 \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0 + m)^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{p}|^4}{m^4}\right).$$

Solution

The remaining scalar products are given by

$$\begin{aligned}
\bar{u}\gamma_5 u &= \frac{N^2}{p_0 + m} \left(\chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \chi_s - \chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger \chi_s \right) = 0 \\
\bar{u}\gamma_0\gamma_5 u &= \frac{N^2}{p_0 + m} \left(\chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \chi_s + \chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger \chi_s \right) = \frac{2N^2}{p_0 + m} \chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \chi_s \\
&= \frac{2N^2}{p_0 + m} \left(\chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \chi_s \right) = \frac{1}{m} \left(\chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \chi_s \right) \\
\bar{u}\gamma^i u &= \frac{N^2}{p_0 + m} \left(\chi_s^\dagger \sigma^i (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \chi_s + \chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger \sigma^i \chi_s \right) = \frac{N^2}{p_0 + m} \left(\chi_s^\dagger p_j \{ \sigma^i, \sigma^j \} \chi_s \right) \\
&= \frac{2N^2 p_i}{p_0 + m} \left(\chi_s^\dagger \sigma_0 \chi_s \right) = \frac{p_i}{m} \\
\bar{u}\sigma^{0i} u &= -\bar{u}\sigma^{i0} u \\
&= i \frac{N^2}{p_0 + m} \left(\chi_s^\dagger \sigma^i (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \chi_s - \chi_s^\dagger (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger \sigma^i \chi_s \right) = \frac{i}{2m} \left(\chi_s^\dagger p_j [\sigma^i, \sigma^j] \chi_s \right) \\
&= \frac{-\epsilon_{ijk} p_j}{m} \left(\chi_s^\dagger \sigma^k \chi_s \right) \\
\bar{u}\gamma^i \gamma_5 u &= N^2 \left(\chi_s^\dagger \sigma^i \chi_s + \chi_s^\dagger \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger \sigma^i (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{(p_0 + m)^2} \chi_s \right) = \chi_s^\dagger \sigma^i \chi_s \\
\bar{u}\sigma^{ij} u &= \epsilon_{ijk} N^2 \left(\chi_s^\dagger \sigma^k \chi_s - \chi_s^\dagger \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^\dagger \sigma^k (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{(p_0 + m)^2} \chi_s \right) = \epsilon_{ijk} \chi_s^\dagger \sigma^k \chi_s
\end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad i\hbar \partial_t \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = c \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q \vec{A}) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + q \phi \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit 2-komponentigen Spinoren ψ, χ

$|i\hbar \partial_t \chi|, |q\phi \chi| \ll |mc^2 \chi|$ führt zu

$$\chi = \frac{c \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q \vec{A})}{2mc^2} \psi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar \partial_t \chi}{2mc^2}, \frac{q\phi}{2mc^2}\right) \quad (2)$$

$$a) \quad i\hbar \partial_t \chi = c \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q \vec{A}) \psi + q\phi \chi - 2mc^2 \chi$$

$$\Leftrightarrow \text{Ox} \quad \frac{i\hbar \partial_t \chi}{2mc^2} = \frac{1}{2mc} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q \vec{A}) \psi + \frac{q\phi \chi}{2mc^2} - \chi$$

$$\Leftrightarrow \chi \left(1 - \frac{q\phi}{2mc^2}\right) = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q \vec{A})}{2mc} \psi + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar \partial_t \chi}{2mc^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q \vec{A}) \psi}{2mc \left(1 - \frac{q\phi}{2mc^2}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{i\hbar \partial_t \chi}{2mc^2}\right) \quad \checkmark$$

Entwickeln in $\frac{q\phi}{2mc^2} := \eta \ll 1$, $a := \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q \vec{A}) \psi}{2mc}$

$$\Rightarrow T\left(\frac{a}{1-x}\right)|_{x=0} = a + ax + \mathcal{O}(x^2) \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \chi = \left(1 + \frac{q\phi}{2mc^2}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q \vec{A}) \psi}{2mc} + \mathcal{O}\left(\underbrace{q^2 d^2}_{:=\alpha} \underbrace{\frac{i\hbar \partial_t \chi}{2mc^2}}_{:=\beta}\right) \quad (*) \quad \checkmark$$

b) $\vec{A} = 0$:

$$\rightarrow (*) = \left(1 + \frac{q\phi}{2mc^2}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2mc} \psi + \mathcal{O}(\alpha, \beta) \quad \checkmark$$

\rightarrow einsetzen in (1):

$$i\hbar \partial_t \psi = \left\{ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left(1 + \frac{q\phi}{2mc^2}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} + \mathcal{O}(\alpha, \beta) \right\} + q\phi \psi$$

$$= \left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{q}{4m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi(r) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + q\phi \right] \psi + \mathcal{O}(\alpha, \beta) \quad \checkmark$$

NR:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \sigma_i a_i \sigma_j b_j = \delta_{ij} a_i b_j + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k a_i b_j = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{4m^2c^2} \left(\vec{\sigma}(\vec{p}\phi(r)) \cdot \vec{\sigma}\vec{p} + \phi(r) \overbrace{\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\sigma}\vec{p}}^{=\vec{p}^2} \right) + q\phi(r) \right] \psi \\
&= \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{4m^2c^2} \left(\phi(r)\vec{p}^2 + \vec{p}\phi(r)\vec{p} + i\vec{\sigma}((\vec{p}\phi(r)) \times \vec{p}) \right) + q\phi(r) \right] \psi \\
&= \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q}{4m^2c^2} \left(\phi\vec{p}^2 - i\hbar(\vec{\nabla}\phi)\vec{p} + \hbar\vec{\sigma}((\vec{\nabla}\phi) \times \vec{p}) \right) + q\phi \right] \psi \quad \checkmark
\end{aligned}$$

c) $q = -e, \vec{A} = 0$

$$\hookrightarrow i\hbar\partial_t\psi = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{4m^2c^2} \left(\phi(r)\vec{p}^2 - i\hbar(\vec{\nabla}\phi)\vec{p} + \hbar\vec{\sigma}((\vec{\nabla}\phi) \times \vec{p}) \right) - e\phi \right] \psi \quad \checkmark$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \propto \vec{\nabla}\phi(r) \times \vec{p} = \frac{d\phi(r)}{dr} \hat{e}_r \times \vec{p} = \frac{d\phi(r)}{dr} \frac{1}{r} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{d\phi(r)}{dr} \frac{1}{r} \vec{L} \quad \checkmark$$

\hookrightarrow Der Teil des Hamiltonoperators, der \vec{L} enthält lautet

$$-\frac{e}{4m^2c^2} \frac{\hbar}{r} \vec{\sigma} \left(\frac{d\phi}{dr} \right) \vec{L} = -\frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \left(\frac{d\phi}{dr} \right) \vec{S} \cdot \vec{L} \quad \checkmark$$

mit dem Spin-Operator $\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$

Dieser Term beschreibt die Spin-Bahn-Kopplung, die zur Entartung der Energieniveaus mit gleichem n aber unterschiedlichem l . \checkmark

$\underline{\underline{\S(515)}}$

④ Zu bestimmen ist das führende Verhalten in $\frac{v}{c}$ der bilinearen Kovarianten $\bar{u}\Gamma u$ mit $\Gamma \in \{ \mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^\mu \gamma^5 \}$ \checkmark

Die Lösungen der freien Dirac-Gleichung für pos. Energien

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} \binom{0}{1} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p+m} \binom{1}{0} \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad \text{und} \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} \binom{0}{1} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p+m} \binom{0}{1} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

mit $N = \sqrt{\frac{p_0+m}{2m}}$ sind aus der VL bekannt, wobei ich $u^{(1)}$ rechnen werde.

$$\bar{u} \Gamma u = u^\dagger \gamma^0 \Gamma u = N^2 \begin{pmatrix} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ p_0+m \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 \Gamma \begin{pmatrix} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ p_0+m \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \bullet \Gamma = \mathbb{1}: \quad \bar{u} \mathbb{1} u &= N^2 \begin{pmatrix} (10) & \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0+m}\right)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ p_0+m \end{pmatrix} \\ &= N^2 \begin{pmatrix} (10) & \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0+m}\right)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ p_0+m \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^\dagger, \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\rightarrow \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0+m}\right)^\dagger \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0+m}\right) = \vec{p}^\dagger \vec{p} = |\vec{p}|^2 \quad \checkmark$$

$$= \frac{p_0+m}{2m} \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0+m)^2} \right) = \frac{p_0+m}{2m} - \frac{|\vec{p}|^2}{2m(p_0+m)}$$

$$= \frac{(p_0+m)^2 - |\vec{p}|^2}{2m(p_0+m)} = \frac{(p_0+m)^2 - p_0^2 + m^2}{2m(p_0+m)} \quad \left| \quad |\vec{p}|^2 = p_0^2 - m^2 \right.$$

$$= \frac{2p_0 m + 2m^2}{2m p_0 + 2m^2} = 1 \quad \checkmark$$

$$\bullet \Gamma = \gamma^M: \quad \bar{u} \gamma^M u = u^\dagger \gamma^0 \gamma^M u$$

$$(i) \gamma^r = \gamma^0: \quad u^\dagger \overbrace{\gamma^0}^{\mathbb{I}_{2 \times 2}} \gamma^0 u = u^\dagger u$$

$$= N^2 \begin{pmatrix} (10) & \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0+m}\right)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ p_0+m \end{pmatrix}$$

$$= N^2 \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0+m)^2} \right) = \frac{p_0+m}{2m} + \frac{p_0+m}{2m} \frac{|\vec{p}|^2}{(p_0+m)^2}$$

$$= \frac{p_0+m}{2m} + \frac{|\vec{p}|^2}{2m(p_0+m)} = \frac{p_0+m}{2m} + \frac{|\vec{p}|^2}{2m(\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}+m)}$$

$$= N^2 \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{|\vec{p}|^2}{m^2}+1}+1} \right)$$

$$\frac{|\vec{p}|^2}{2m^2} = \frac{m^2 \beta^2}{2m^2} \rightarrow \text{Taylorreihe in } \frac{v}{c} = \beta \ll 1:$$

$$\begin{aligned} \Gamma \left(\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} = \frac{|\vec{v}|^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{c^2 \beta^2}{1 - \beta^2} \Big|_{\beta=0} \right) &= 0 + 0 + c^2 \beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}{2m} + \frac{|\vec{p}|^2}{2m^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + 1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + 1} + \frac{|\vec{p}|^2}{2m^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{|\vec{p}|^2}{m^2} + 1}} \end{aligned}$$

keine lust mehr **Verständlich, die Aufgabe ist recht unnötig**

Σ(7/10)

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 8

Abgabe: 09.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 13.01.2026

Aufgabe 1: (*) Gesamtdrehimpuls (2 Punkte)

Die Dirac Gleichung kann in folgender Form geschrieben werden

$$i\partial_t\psi = H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi.$$

Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ mit dem Hamiltonian kommutiert, also $[H, \vec{J}] = 0$, wobei der Spin-Operator \vec{S} gegeben ist durch

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Solution

We calculate first the commutators

$$[H, L^k] = \varepsilon^{knm}[\alpha^j p^j, x^n p^m] = -i\varepsilon^{kjm} \alpha^j p^m$$

and

$$[H, S^k] = [\alpha^j p^j + \beta m, S^k] = i\varepsilon^{jkl} \alpha^l p^j,$$

where we used

$$[\alpha^j, S^k] = i\varepsilon^{jkl} \alpha^l$$

and

$$[\beta, S^k] = 0.$$

In total we obtain

$$[H, J^k] = [H, L^k] + [H, S^k] = -i\varepsilon^{kjm} \alpha^j p^m + i\varepsilon^{jkl} \alpha^l p^j = 0.$$

Aufgabe 2: (*) Projektoren für Energie und Spin (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\Lambda_{\pm}(p), \Sigma(s)],$$

wobei $\Lambda_{\pm}(p) = \frac{\pm\not{p} + m}{2m}$ und $\Sigma(s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}$ den Energie- bzw. Spinprojektor bezeichnet. s^{μ} ist der Spin-Vierervektor und p^{μ} der Viererimpuls.

Solution

We calculate the commutator

$$[\Lambda_{\pm}(p), \Sigma(s)] = \mp \frac{\gamma_5 \not{p} \cdot s}{2m}$$

- b) Zerlegen Sie s^μ in $\xi p^\mu + \eta g^{\mu 0}$, indem Sie $s^2 = -1$ und $s \cdot p = 0$ benutzen. Gegen welchen Ausdruck strebt s^μ für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$?

Solution

We consider first the condition $s^2 = -1$:

$$s^2 = -1 = s_\mu s^\mu = \xi^2 m^2 + 2\xi \eta p_0 + \eta^2 g_0^0$$

We use the second condition to obtain an expression of η as a function of ξ :

$$\begin{aligned} s \cdot p = 0 &= \xi p^\mu p_\mu + \eta p^\mu g_{\mu 0} = \xi m^2 + \eta p_0 \\ \rightarrow \eta &= -\xi \frac{m^2}{p_0} \end{aligned}$$

Inserting this into the first equations leads to

$$\begin{aligned} -1 &= \xi^2 m^2 - 2\xi^2 m^2 + \xi^2 \frac{m^4}{p_0^2} \\ \rightarrow \xi &= \frac{p_0}{m \sqrt{p_0^2 - m^2}}, \end{aligned}$$

where we chose the positive solution for ξ . In the limit $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ we have $p_0^2 \gg m^2$ and obtain

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \frac{1}{m}, \\ \eta &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie $\Lambda_{\pm} \Sigma(s)$ für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$.

Solution

$$\left(\frac{\pm \not{p} + m}{2m} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \right) = \frac{1}{4} \pm \frac{\not{p} \gamma_5 \not{s}}{4m} \pm \frac{\not{p}}{4m} + \frac{\gamma_5 \not{s}}{4}$$

From the previous part we know that in the limit $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ we obtain $s^\mu \rightarrow p^\mu/m$. So we can calculate

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \pm \frac{\not{p} \gamma_5 \not{p}}{4m^2} \pm \frac{\not{p}}{4m} + \frac{\gamma_5 \not{p}}{4m} &= \frac{1}{4} \mp \frac{\gamma_5}{4} \pm \frac{\not{p}}{4m} + \frac{\gamma_5 \not{p}}{4m} \\ &= \frac{1}{4} (1 \mp \gamma_5) \pm (1 \pm \gamma_5) \frac{\not{p}}{4m}. \end{aligned}$$

- d) Zeigen Sie, dass für freie Elektron-Wellenfunktionen mit s^μ und p^μ gilt

$$u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = (\Lambda_+(p))_{\alpha\delta} (\Sigma(s))_{\delta\beta},$$

wobei α und β hier Spinorindizes sind.

Solution (nicer solution)

We have the following relations for the spin projector and the solutions of the Dirac equation:

$$\begin{aligned}\Sigma(s)u(p, s) &= u(p, s), \\ \Sigma(s)u(p, -s) &= 0,\end{aligned}$$

where $u(p, s)$ and $u(p, -s)$ are the solutions with spin up and spin. We can rewrite this to

$$u^\dagger(p, s)\Sigma^\dagger(s) = u^\dagger(p, s),$$

With the relations $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ and $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ we find $\Sigma^\dagger(s) = \gamma^0\Sigma(s)\gamma^0$ and obtain the following relation

$$\begin{aligned}u^\dagger(p, s)\gamma^0\gamma^0\Sigma^\dagger(s)\gamma^0 &= u^\dagger(p, s)\gamma^0 \\ \rightarrow \bar{u}(p, s)\Sigma(s) &= \bar{u}(p, s).\end{aligned}$$

We consider

$$u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) = (\Sigma(s)u(p, s))_\alpha (\bar{u}(p, s)\Sigma(s))_\beta.$$

Next we add a zero in the brackets by adding the spinors with $-s$ which in combination of $\Sigma(s)$ leads to zero:

$$u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) = (\Sigma(s)(u(p, s) + u(p, -s)))_\alpha ((\bar{u}(p, s) + \bar{u}(p, -s))\Sigma(s))_\beta$$

Now we can use the completeness relations of the spinors

$$\Sigma_{r=\{s, -s\}} u(p, r)_\alpha \bar{u}(p, r)_\beta = \Lambda_+(p)_{\alpha\beta}.$$

Insert this in our expression leads to

$$\begin{aligned}u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) &= (\Sigma(s)(u(p, s) + u(p, -s)))_\alpha ((\bar{u}(p, s) + \bar{u}(p, -s))\Sigma(s))_\beta \\ &= \Sigma_{\alpha\mu}(s) ((u(p, s) + u(p, -s)))_\mu ((\bar{u}(p, s) + \bar{u}(p, -s)))_\nu \Sigma_{\nu\beta}(s) \\ &= \Sigma_{\alpha\mu}(s)\Lambda_+(p)_{\mu\nu}\Sigma_{\nu\beta}(s) \\ &= (\Sigma(s)\Lambda_+\Sigma(s))_{\alpha\beta} \\ &= (\Lambda_+\Sigma(s)\Sigma(s))_{\alpha\beta} \\ &= (\Lambda_+\Sigma(s))_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

where we used in the last two steps that the commutator of $\Sigma(s)$ and Λ_+ vanishes (see a and b) and the properties for projectors in general that $P^2 = P$.

Solution

We start with left hand side of the equation:

$$u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) = \begin{pmatrix} \frac{p_0+m}{2m}\chi\chi^\dagger & -\chi\chi^\dagger\frac{p^i\sigma^i}{2m} \\ \frac{p^i\sigma^i}{2m}\chi\chi^\dagger & -\frac{|\vec{p}|^2}{2m}\chi\chi^\dagger \end{pmatrix}$$

For the right hand side we get

$$\left[\frac{p^0\gamma^0 - p^i\gamma^i + m\mathbb{1}}{2m} \right] \left[\frac{\mathbb{1} + \gamma_5 s_\mu \gamma^\mu}{2} \right] = \begin{pmatrix} \frac{p_0+m}{2m} & -\frac{p^i\sigma^i}{2m} \\ \frac{p^i\sigma^i}{2m} & -\frac{|\vec{p}|^2}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{s^j\sigma^j}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{s^j\sigma^j}{2} \end{pmatrix}$$

Now we can consider for example a spin along the z-axis $s^\mu = (0, 0, 0, 1)^T$ for which we obtain

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{s^j\sigma^j}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{s^j\sigma^j}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sigma^3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sigma^3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Gordon-Zerlegung

- a) Zeigen Sie, dass gilt: $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$, wobei $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Solution

We show

$$g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu\gamma^\nu.$$

- b) Gegeben seien die Impulsraum-Spinoren $u(p_i)$ und $\bar{u}(p_f)$, die die Dirac-Gleichungen $(\not{p}_i - m)u(p_i) = 0$ bzw. $\bar{u}(p_f)(\not{p}_f - m) = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\bar{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i) = \bar{u}(p_f) \left[\frac{(p_i + p_f)^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu}{2m} \right] u(p_i).$$

Solution

By using the relation of the first part we get

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i) &= \bar{u}(p_f) \left[\frac{(p_i + p_f)^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu}{2m} \right] u(p_i) \\ &= \bar{u}(p_f) \left[\frac{(p_i + p_f)^\mu}{2m} + \frac{g^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu}{2m} - \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu(p_f - p_i)_\nu}{2m} \right] u(p_i) \\ &= \bar{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Foldy-Wouthuysen Transformation

Wir betrachten die Dirac-Gleichung für ein Elektron im Wasserstoffatom und verwenden den Ansatz

$$\psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir folgendes System von gekoppelten Differentialgleichungen

$$T \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[-m + e\phi + \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + m\beta \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

wobei $T = E - m$ die kinetische Energie ist. Zeigen Sie, dass nach der Foldy-Wouthuysen Transformation mit der unitären Matrix U

$$U = U^\dagger = C\beta + \frac{1}{2m}\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \quad \text{mit} \quad C = \sqrt{1 - \frac{\vec{p}^2}{4m^2}},$$

die Diagonaleinträge für die obere Komponente φ aus dem Term

$$U\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})U^\dagger$$

nach der Entwicklung bis einschließlich $\mathcal{O}(\vec{p}^4/m^3)$ geschrieben werden können als

$$\frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \right] - \frac{\vec{p}^4}{8m^3},$$

wobei wir $e|\phi|, e|\vec{A}| = \mathcal{O}(\vec{p}^2/m)$ annehmen.

Solution

We consider first the full expression

$$\begin{aligned} U\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})U^\dagger &= C^2\beta\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + \frac{C}{2m} \left[\beta\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \beta \right] \\ &\quad + \frac{1}{4m^2} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\alpha} \cdot \vec{p}. \end{aligned}$$

The only terms that can contribute to the diagonal terms are even in $\vec{\alpha}$, so only the second will contribute to the diagonal terms. Using the relation $\{\alpha^j, \beta\} = 0$, we can write diagonal terms as

$$\begin{aligned} &\frac{C}{2m}\beta \left[\beta\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \beta \right] \\ &= \frac{C}{2m}\beta \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

The diagonal term for the φ component is then given by

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \right] - \frac{\vec{p}^2}{8m^2} \frac{1}{m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \\ &= \frac{\lambda}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \right] - \frac{\vec{p}^4}{8m^3}, \end{aligned}$$

where we have expanded up $\mathcal{O}(\vec{p}^4/m^3)$.

Aufgabe 5: (*) System von zwei identischen Teilchen (2 + 2 = 4 Punkte)

Betrachten Sie ein System von zwei identischen Teilchen mit (i) Spin 1/2 und (ii) Spin 1, die jeweils ein von zwei Einteilchenzuständen annehmen können mit $H|0\rangle = -\varepsilon|0\rangle$ und $H|1\rangle = \varepsilon|1\rangle$. Vernachlässigen Sie dabei die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen.

- (a) Geben Sie die gemeinsamen Eigenvektoren der Operatoren \vec{S}^2 und S_z an, wobei \vec{S} der Gesamtspinoperator ist.

Hinweis: Benutzen Sie dazu z.B. die tabellierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus <https://pdg.lbl.gov/2018/reviews/rpp2018-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf>.

Solution

- (i) The two spin-1/2 system ($1/2 \oplus 1/2$) admits irreducible tensor representation ($1 \otimes 0$), i.e. spin triplet and singlet. For the spin triplet we have symmetric states

$$|1, +1\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle .$$

For the spin singlet we have one anti-symmetric state

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) .$$

The coefficients in front of the $|\uparrow\rangle |\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle$ states can be read from Clebsch-Gordan table.

Solution

(ii) The two spin-1 system ($1 \oplus 1$) admits irreducible tensor representation ($2 \otimes 1 \otimes 0$). According to the Clebsch-Gordan table, we have the symmetric states for the spin quintuplet:

$$|2, +2\rangle = |1, +1\rangle |1, +1\rangle$$

$$|2, +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, +1\rangle |1, 0\rangle + |1, 0\rangle |1, +1\rangle)$$

$$|2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |1, +1\rangle |1, -1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, 0\rangle |0, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |1, -1\rangle |1, +1\rangle$$

$$|2, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle |1, -1\rangle + |1, -1\rangle |1, 0\rangle)$$

$$|2, -2\rangle = |1, -1\rangle |1, -1\rangle$$

and anti-symmetric states for spin triplet:

$$|1, +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, +1\rangle |1, 0\rangle - |1, 0\rangle |1, +1\rangle)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, +1\rangle |1, -1\rangle - |1, -1\rangle |1, +1\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle |1, -1\rangle - |1, -1\rangle |1, 0\rangle)$$

and symmetric state for spin singlet:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1, +1\rangle |1, -1\rangle - |1, 0\rangle |1, 0\rangle + |1, -1\rangle |1, +1\rangle) .$$

Note that the kets on the left hand side denotes the states in tensor representation.

- (b) Berechnen Sie die Energien und die Wellenfunktionen für alle möglichen Zustände. Geben Sie jeweils den Entartungsgrad an.

Solution

In total the system has three eigenenergies -2ε , 0 and 2ε with the eigenfunctions

$$|0\rangle_+ = |0\rangle |0\rangle,$$

$$|1\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle)$$

$$|1\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |0\rangle - |0\rangle |1\rangle)$$

and

$$|2\rangle_+ = |1\rangle |1\rangle,$$

where subscript indicates whether the wavefunction is symmetric (+) or anti-symmetric (-).

(i) The two spin-1/2 system obeys fermionic statistics, hence its total wave functions are anti-symmetric. So taking into account the spin we get the following total wave functions

$$|0\rangle_+ |0, 0\rangle, \quad |1\rangle_+ |0, 0\rangle, |1\rangle_- |1, s\rangle, \quad |2\rangle_+ |0, 0\rangle.$$

Thus, the eigenenergies $\pm 2\varepsilon$ are not degenerated and the eigenenergy 0 is 4 times degenerated.

Solution

(ii) The two spin-1 system obeys bosonic statistics, hence its total wave functions are symmetric. Thus, we have the following total wave functions

$$|0\rangle_+ |0, 0\rangle, |0\rangle_+ |2, 0\rangle, \quad |1\rangle_+ |0, 0\rangle, |1\rangle_+ |2, 0\rangle, |1\rangle_- |1, s\rangle \quad |2\rangle_+ |0, 0\rangle, |2\rangle_+ |2, s\rangle,$$

and the eigen energies $\pm 2\varepsilon$ are 6 times degenerated and the eigen state 0 is 9 times degenerated.

Aufgabe 6: System von N nicht-wechselwirkenden identischen Bosonen

Betrachten Sie ein System aus N nicht-wechselwirkenden identischen Bosonen, bei dem das i -te Niveau n_i -fach besetzt sei. Die Ein-Teilchen-Zustände seien gegeben durch $|\alpha, i_\alpha\rangle$, wobei α bzw. i_α den Teilchen- bzw. Niveauindex bezeichnen. Drücken Sie den Zustandsvektor dieses Systems unter Berücksichtigung des Symmetrisierungspostulats durch die Produktzustände

$$|1, i_1; 2, i_2; \dots; N, i_N\rangle = |1, i_1\rangle \otimes \dots \otimes |N, i_N\rangle$$

aus und leiten Sie die Normierungskonstante her.

Solution

Suppose we have the n_i -fold (degenerate) occupations that $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$, then we have $\frac{N!}{n_1! n_2! \dots}$ possibilities to distribute the N bosons. Any distinct state can be described as $|1, i_1\rangle \otimes |2, i_2\rangle \dots |N, i_N\rangle$. Then the wave function is

$$\psi_B = \sqrt{\frac{n_1! n_2! \dots}{N!}} \sum |1, i_1\rangle \otimes |2, i_2\rangle \dots |N, i_N\rangle ,$$

where the summation sums over all possible distinct permutations of the level indices i_1, i_2, \dots, i_N .

Aufgabe 7: Lagrange Multiplikatoren

Finden Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ in

1. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
2. $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Benutzen sie die Methode der Lagrange Multiplikatoren.

Solution

Since S^1 and K_2 are compact sets and f is continuous, it attains maximum and minimum both in S^1 and in K_2 .

1. The critical points of $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ with the constraint $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ are determined through the equations $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ and $g(x, y) = 0$, i.e. by

$$\begin{cases} 2x - 1 = 2\lambda x \\ 4y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

There are two cases: either $y \neq 0$, then $\lambda = 2$ and we find the two critical points

$$P_1 = (-1/2, -\sqrt{3}/2) \quad \text{and} \quad P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2);$$

or $y = 0$, and then the critical points are

$$P_3 = (-1, 0) \quad \text{and} \quad P_4 = (1, 0)$$

(respectively for $\lambda = 3/2$ and $\lambda = 1/2$).

We observe that

$$f(-1/2, -\sqrt{3}/2) = f(-1/2, \sqrt{3}/2) = \frac{9}{4}, \quad f(-1, 0) = 2, \quad f(1, 0) = 0.$$

Hence f attains its maximum in the two critical points $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$, its minimum in the critical point $(1, 0)$.

2. The set K can be decomposed as the union of S^1 and the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Critical points in the open set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ are characterized by $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 4y) = 0$. This equation is satisfied at $(1/2, 0)$. Since $f(1/2, 0) = -1/4$, we conclude that the maximum of f is attained on K in the two points $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$, lying on the boundary of K (hence $\max_{(x,y) \in K} f(x, y) = f(-1/2, \pm\sqrt{3}/2) = 9/4$). The minimum of f , on the other hand, is attained in the point $(1/2, 0)$, in the interior of K (hence, $\min_{(x,y) \in K} f(x, y) = f(1/2, 0) = -1/4$).

$$i\partial_t \psi = H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi$$

$$\text{z.z: } [H, \vec{J}] = 0 \text{ mit } \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad \text{mit } \vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[H, \vec{J}] = [H, \vec{L} + \vec{S}] = [H, \vec{L}] + [H, \vec{S}] \quad \checkmark$$

$$[H, \vec{L}] = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \vec{L}] = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{L}] + \underbrace{[\beta m, \vec{L}]}_{=0} \quad \checkmark$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$[\alpha_j p_j, \epsilon_{ilm} r_l p_m] = \epsilon_{ilm} (\alpha_j [p_j, r_l p_m] + [\alpha_j, r_l p_m] p_j)$$

= 0, α_j ist konst. Matrix aus Spinorraum

$$[a, b, c] = a[b, c] + [a, c]b$$

$$[a, b, c] = [a, b]c + b[a, c]$$

$$= \epsilon_{ilm} \alpha_j \left(\underbrace{[p_j, r_l]}_{=-i\hbar \delta_{jl}} p_m + r_l \underbrace{[p_j, p_m]}_{=0} \right)$$

$$= -i\hbar \epsilon_{ilm} \alpha_l p_m = -i\hbar (\vec{\alpha} \times \vec{p}) \quad \checkmark$$

$$[H, \vec{S}] = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \vec{S}] = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}] + [\beta m, \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}] \quad \checkmark$$

$$= \frac{\hbar}{2} ([\alpha_j p_j, \Sigma_k] + m [\beta, \Sigma_k])$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\alpha_j \underbrace{[p_j, \Sigma_k]}_{=0} + [\alpha_j, \Sigma_k] p_j + m \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2} ([\alpha_j, \Sigma_k] p_j) = \frac{\hbar}{2} (\alpha_j \Sigma_k - \Sigma_k \alpha_j) p_j$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right) p_j$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \sigma_k \\ \sigma_j \sigma_k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \sigma_j \\ \sigma_k \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right) p_j$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_j, \sigma_k] \\ [\sigma_j, \sigma_k] & 0 \end{pmatrix} p_j = \frac{\hbar}{2} \epsilon_{jkl} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_l \\ \sigma_l & 0 \end{pmatrix} p_j$$

$$= i\hbar \epsilon_{kjl} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_l \\ \sigma_l & 0 \end{pmatrix} p_j = i\hbar (\vec{\alpha} \times \vec{p}) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow [H, \vec{L}] + [H, \vec{S}] = -i\hbar (\vec{\alpha} \times \vec{p}) + i\hbar (\vec{\alpha} \times \vec{p}) = 0 \quad \checkmark \quad \Sigma(212)$$

(2)

a) Gesucht sind die Kommutatoren $[\Lambda_{\pm}(p), \Sigma(s)]$ mit dem Energieprojektor $\Lambda_{\pm}(p) = \pm \frac{\not{p} + m}{2m} = \pm \frac{\gamma^{\mu} p_{\mu} + m}{2m}$ und dem Spinprojektor

$$\Sigma(s) = \frac{1 + \gamma^5 \not{s}}{2} = \frac{1 + \gamma^5 \gamma^{\mu} s_{\mu}}{2}$$

$$[\Lambda_{\pm}, \Sigma] = \pm \left[\frac{\not{p} + m}{2m}, \frac{\gamma^5 \not{s} + 1}{2} \right] = \pm \frac{1}{4m} [\not{p}, \gamma^5 \not{s}]$$

$$= \pm \frac{1}{4m} [\gamma^{\mu} p_{\mu}, \gamma^5 \gamma^{\nu} s_{\nu}]$$

$$= \pm \frac{p_{\mu} s_{\nu}}{4m} [\gamma^{\mu}, \gamma^5 \gamma^{\nu}] = \pm \frac{p_{\mu} s_{\nu}}{4m} (\gamma^{\mu} \gamma^5 \gamma^{\nu} - \gamma^5 \gamma^{\nu} \gamma^{\mu})$$

Es gilt $\{\gamma^5, \gamma^{\mu}\} = 0$ und $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$

$$\hookrightarrow \gamma^{\mu} \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^{\mu}$$

$$\hookrightarrow \gamma^{\mu} \gamma^5 \gamma^{\nu} = -\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}$$

$$= \pm \frac{p_{\mu} s_{\nu}}{4m} (-\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^5 \gamma^{\nu} \gamma^{\mu})$$

$$= \pm \frac{p_{\mu} s_{\nu}}{4m} (-\gamma^5 \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\})$$

$$= \mp \frac{p_{\mu} s_{\nu}}{4m} \gamma^5 2g^{\mu\nu} = \mp \gamma^5 \frac{p \cdot s}{2m}$$

b) $S^{\mu} = \xi p^{\mu} + \eta g^{\mu 0}$

Es gilt $S^2 = -1$:

$$S^2 = S^{\mu} s_{\mu} = (\xi p^{\mu} + \eta g^{\mu 0}) (\xi p_{\mu} + \eta g_{\mu 0})$$

$$= \xi^2 p^2 + \xi p^{\mu} \eta g_{\mu 0} + \eta g^{\mu 0} \xi p_{\mu} + \eta^2 \overbrace{g^{\mu 0} g_{\mu 0}}^1$$

$$= \xi^2 m^2 + \xi \eta p_0 + \eta \xi \overset{= p_0}{p^0} + \eta^2$$

$$= \xi^2 m^2 + 2\xi \eta p_0 + \eta^2 = -1 \quad (1)$$

Es gilt außerdem $s \cdot p = 0$:

$$s \cdot p = \sum_{\mu} p^{\mu} = (\xi p_{\mu} + \eta \delta_{\mu 0}) p^{\mu} = \xi p^2 + \eta \delta_{\mu 0} p^{\mu} \\ = \xi m^2 + \eta p_0 = 0 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \eta = -\frac{\xi m^2}{p_0} \rightarrow \text{einsetzen in (1):}$$

$$\Rightarrow \xi^2 m^2 - 2 \xi^2 m^2 + \frac{\xi^2 m^4}{p_0^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \xi^2 \left(m^2 - 2m^2 + \frac{m^4}{p_0^2} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \xi^2 = -\frac{1}{-m^2 + \frac{m^4}{p_0^2}} = \frac{1}{m^2 - \frac{m^4}{p_0^2}} \\ = \frac{p_0^2}{m^2(p_0^2 - m^2)}$$

$$\Leftrightarrow \xi = \pm \frac{p_0}{m \sqrt{p_0^2 - m^2}} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \eta = \mp \frac{p_0 m^2}{p_0 m \sqrt{p_0^2 - m^2}} = \mp \frac{m}{\sqrt{p_0^2 - m^2}}$$

$$\text{Limes } |\vec{p}| \rightarrow \infty \Leftrightarrow p_0 \gg m^2 \Leftrightarrow 1 \gg \frac{m^4}{p_0^2} \Leftrightarrow 1 \gg \frac{p_0}{m^2}$$

$$\Rightarrow \eta = -\xi \frac{m^2}{p_0} \rightarrow 0 \quad \checkmark$$

$$\xi = \pm \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 m^2 - m^4}} = \pm \frac{1}{\sqrt{m^2 - \frac{m^4}{p_0^2}}} \rightarrow \pm \frac{1}{m} \quad \checkmark$$

$$c) \quad \Lambda_{\pm} \Sigma = \left(\pm \frac{\not{p} + m}{2m} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{\beta}}{2} \right)$$

aus b): $S^\mu = \sum p^\mu + \eta g^{\mu 0} \rightarrow \frac{p^\mu}{m}$ für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \left(\pm \frac{p^0 + m}{2m} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \beta}{2} \right) \rightarrow \left(\pm \frac{p^0 + m}{2m} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 p^0}{2m} \right)$$

$$= \pm \frac{p^0}{m} \pm \frac{\cancel{p^0} \gamma^5 \cancel{p^0}}{4m^2} + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^5 p^0}{4m} \quad \checkmark$$

d) zz.: $u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = (\mathcal{U}_+ (p))_{\alpha s} (\mathcal{E}(s))_{s\beta}$ für freie Elektron-WF mit s^μ, p^μ

$u(p, s)$ ist eine Lösung der Dirac-Gleichung (pos. Energien)

$$\hookrightarrow \overset{\text{Spin up}}{\downarrow} \Sigma(s) u(p, s) = u(p, s) \quad \overset{(*)}{\checkmark}, \quad \overset{\text{Spin down}}{\downarrow} \Sigma(s) u(p, -s) = 0 \quad \overset{(\checkmark)}{\checkmark} \quad | \quad ()^t$$

$$\Leftrightarrow (\Sigma(s) u(p, s))^t = u^t(p, s)$$

$$\Leftrightarrow u^t(p, s) \Sigma^t(s) = u^t(p, s)$$

$$\bar{u}(p, s) = u^t(p, s) \gamma^0$$

$$\bar{u} u = 1$$

$$\Leftrightarrow u^t(p, s) \underbrace{\left(\frac{1 + \gamma^5 \gamma^\mu s_\mu}{2} \right)^t}_{\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0} = u^t(p, s)$$

$$(\gamma^5 \gamma^\mu s_\mu)^t = \gamma^{\mu t} s_\mu \gamma_5^t = \gamma^0 \gamma^\mu s_\mu \gamma^0 \gamma_5 = \gamma^0 \gamma_5 \gamma^\mu s_\mu \gamma^0 = \gamma^0 \Sigma(s) \gamma^0$$

$$\Leftrightarrow u^t(p, s) \gamma^0 \Sigma(s) \gamma^0 = u^t(p, s) \quad | \quad () \cdot \gamma^0$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}(p, s) \Sigma(s) \overset{= \mathbb{I}}{\gamma^0 \gamma^0} = \bar{u}(p, s) \quad \overset{(**)}{\checkmark}$$

$(*)$ $(**)$

$$\Rightarrow u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = (\Sigma(s) u(p, s))_\alpha (\bar{u}(p, s) \Sigma(s))_\beta$$

$$\Leftrightarrow u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = (\Sigma(s) (u(p, s) + u(p, -s)))_\alpha ((\bar{u}(p, s) + \bar{u}(p, -s)) \Sigma(s))_\beta$$

Die eingefüsten Terme ergeben Null. Jetzt kann die

Vollständigkeitsrelation $\sum_s u(p,s)_\mu \bar{u}(p,s)_\nu = \mathcal{L}_+(\rho)_{\mu\nu}$ verwendet werden: ✓

$$\begin{aligned}
 u_\alpha(p,s) \bar{u}_\beta(p,s) &= \sum_{\alpha\mu} \epsilon_\mu(s) (u(p,s) + u(p,-s))_\mu (\bar{u}(p,s) + \bar{u}(p,-s))_\nu \epsilon_{\nu\beta}(s) \\
 &= \sum_{\alpha\mu} \epsilon_\mu(s) (u(p,s) \bar{u}(p,s)_\nu + u(p,-s) \bar{u}(p,-s)_\nu) \epsilon_{\nu\beta}(s) \\
 &= \sum_{\alpha\mu} \epsilon_\mu(s) \mathcal{L}_{+\mu\nu}(\rho) \sum_{\nu\beta} \epsilon_{\nu\beta}(s) \\
 &= (\sum(s) \mathcal{L}_+(\rho) \sum(s))_{\alpha\beta} \\
 &\stackrel{[\sum(s), \mathcal{L}_+(\rho)] = 0}{=} (\mathcal{L}_+(\rho) \sum(s) \sum(s))_{\alpha\beta} \\
 &\stackrel{\sum(s) \sum(s) = \sum(s)}{=} (\mathcal{L}_+(\rho) \sum(s))_{\alpha\beta} \\
 &= (\mathcal{L}_+(\rho))_{\alpha\beta} (\sum(s))_{\beta\beta} \quad \checkmark \quad \sum(4|4)
 \end{aligned}$$

⑤ $H|0\rangle = -\epsilon|0\rangle, H|1\rangle = \epsilon|1\rangle$

(Clebsch-Gordan-Koeffizienten: Clebsch-Gordan-Koeff.
 $|s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle \leftrightarrow |S M\rangle : |S M\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle s_1 m_1 s_2 m_2 | S M \rangle |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$

a) (i) zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen \rightarrow Produktbasis $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$

\rightarrow es gibt einen Triplet- und einen Singulett-Zustand:

• Singulett-Zustand mit $S = s_1 + s_2 = 0$ (antisymm. Spin) := $|\frac{1}{2}, 0\rangle$

$$\begin{aligned}
 |S, M\rangle = |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{\left(+|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right)}^{\text{CGK}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

• Triplet-Zustand mit $S = 1$ (symm. Spin) := $|\frac{3}{2}, \pm\rangle$

$M = +1: |1, 1\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \quad \checkmark$

$$M=0: |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) \checkmark$$

$$M=-1: |1,-1\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \checkmark$$

ii) Zwei Spin-1-Teilchen \rightarrow Produktbasis $|m_1 m_2\rangle$ mit $m_i \in \{1, 0, -1\}$

• Quintett-Zustand mit $S=2$ (symm. im Spin) := $|1, 2\rangle$

$$|2, +2\rangle = |1, +1\rangle |1, +1\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|2, +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle |1, +1\rangle + |1, +1\rangle |1, 0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle + |1, 0\rangle)$$

$$|2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|1, +1\rangle |1, -1\rangle + 2|1, 0\rangle |1, 0\rangle + |1, -1\rangle |1, +1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (|1, -1\rangle + 2|0, 0\rangle + |-1, +1\rangle)$$

$$|2, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle |1, -1\rangle + |1, -1\rangle |1, 0\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, -1\rangle + |-1, 0\rangle)$$

$$|2, -2\rangle = |1, -1\rangle |1, -1\rangle = |-1, -1\rangle \checkmark$$

• Triplet-Zustand mit $S=1$ (antisymm. im Spin) := $|1, 1\rangle$

$$|1, +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, +1\rangle |1, 0\rangle - |1, 0\rangle |1, +1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+1, 0\rangle - |0, +1\rangle)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, +1\rangle |1, -1\rangle - |1, -1\rangle |1, +1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+1, -1\rangle - |-1, +1\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle |1, -1\rangle - |1, -1\rangle |1, 0\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, -1\rangle - |-1, 0\rangle) \quad \checkmark$$

Singulett-Zustand mit $S=0$ (Symm. im Spin) := $|1, 0\rangle$:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1, +1\rangle |1, -1\rangle - |1, 0\rangle |1, 0\rangle + |1, -1\rangle |1, +1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (|+1, -1\rangle - |0, 0\rangle + |-1, +1\rangle) \quad \checkmark$$

b) Es gibt zwei Möglichkeiten der Einteilchenzustände mit

$$H|0\rangle = -\varepsilon|0\rangle \quad \text{und} \quad H|1\rangle = \varepsilon|1\rangle$$

Da es keine WW zw. den Teilchen gibt, ist $H_{\text{ges}} = H_1 + H_2 \rightarrow E_{\text{ges}} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Die Gesamtwellenfunktionen sind für Fermionen unter Vertauschung antisymmetrisch und für Bosonen symm.

Betrachtet man zwei identische Teilchen in den Zuständen $|\varphi_{\alpha 1}\rangle$ und $|\varphi_{\alpha 2}\rangle$, dann ist der Startket gegeben durch

$|u\rangle = |\varphi_{\alpha 1}, \varphi_{\alpha 2}\rangle$ und die symm. & antisymm. Zustände sind

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\alpha} P_{\alpha} |u\rangle \quad \text{mit der Teilchenanzahl } N \text{ und dem Per-} \\ \text{mutationsoperator } P_{\alpha}$$

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} P_{\alpha} |u\rangle \quad \text{mit } \varepsilon_{\alpha} = \begin{cases} 1, \text{ gerade Permutation} \\ -1, \text{ ungerade Permutation} \end{cases}$$

=> Grundzustand:

$|00\rangle$ mit der Energie $E_0 = -2\varepsilon$ (symm.)

Erste angeregte Zustände:

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,1\rangle + |1,0\rangle)$$

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,1\rangle - |1,0\rangle) \quad \text{mit der Energie } E_1 = 0$$

Zweiter angeregter Zustand:

$|11\rangle$ mit der Energie $E_2 = 2\varepsilon$ (symm.) ✓

i) Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (antisymm. Gesamt-WF $|\psi\rangle = |\psi_{\text{Raum}}\rangle |\psi_{\text{Spin}}\rangle$)

Grundzustand: $|00\rangle \cdot |0,0\rangle \Rightarrow E = -2\varepsilon$

1. Anregung:

$$|\psi_s\rangle \cdot |0,0\rangle$$

$$|\psi_A\rangle \cdot |1,1\rangle$$

$$|\psi_A\rangle \cdot |1,0\rangle$$

$$|\psi_A\rangle \cdot |0,1\rangle$$

} 4x entartet $E = 0$

2. Anregung:

$$|1,1\rangle \cdot |0,0\rangle \Rightarrow E = 2\varepsilon \quad \checkmark$$

ii) Spin-1-Teilchen (symm. Gesamt-WF):

Grundzustand:

$$|0,0\rangle \cdot |2,2\rangle$$

$$|0,0\rangle \cdot |2,1\rangle$$

$$|0,0\rangle \cdot |2,0\rangle$$

$$|0,0\rangle \cdot |2,-1\rangle$$

$$|0,0\rangle \cdot |2,-2\rangle$$

$$|0,0\rangle \cdot |1,-1\rangle$$

} 6x entartet $E = -2\varepsilon$

1. Anregung:

$$|\psi_S\rangle |2,2\rangle$$

$$|\psi_S\rangle |2,1\rangle$$

$$|\psi_S\rangle |2,0\rangle$$

$$|\psi_S\rangle |2,-1\rangle$$

$$|\psi_S\rangle |2,-2\rangle$$

$$|\psi_A\rangle |1,-1\rangle$$

$$|\psi_A\rangle |1,1\rangle$$

$$|\psi_A\rangle |1,0\rangle$$

$$|\psi_A\rangle |1,-1\rangle$$

9x entartet $E=0$



2. Anregung:

$$|1,1\rangle |2,2\rangle$$

$$|1,1\rangle |2,1\rangle$$

$$|1,1\rangle |2,0\rangle$$

$$|1,1\rangle |2,-1\rangle$$

$$|1,1\rangle |2,-2\rangle$$

$$|1,1\rangle |1,-1\rangle$$

6x entartet $E=2E$



$E(4|4)$

$E(10|10)$

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 9

Abgabe: 16.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 20.01.2026

Aufgabe 1: (*) Ideales Gas (2 + 2 = 4 Punkte)

Ist die Entropie eines Systems als Funktion der extensiven Zustandsgrößen aufgrund einer mikroskopischen Theorie bekannt, so können mit Hilfe der thermodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit angegeben werden.

a) Leiten Sie mit Hilfe der Entropie des idealen Gases

$$S(U, V, N) = S_0 \frac{N}{N_0} + Nk_B \left[\frac{f}{2} \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) - \frac{f+2}{2} \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) \right],$$

die thermische und kalorische Zustandsgleichungen her.

Solution

We use

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} = \frac{Nk_B f}{2U},$$
$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} = \frac{Nk_B}{V},$$

which then directly leads to the equations of state.

b) Zeigen Sie, dass bei einer adiabatischen Zustandsänderung ($dS = 0$) mit konstanter Teilchenzahl N gilt:

$$pV^{\frac{f+2}{f}} = \text{const}, \quad VT^{\frac{f}{2}} = \text{const}$$

Gehen Sie hierfür jeweils von der differentiellen Form der Beziehung

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

aus.

Solution

We consider the case of a constant particle number:

$$dN = 0.$$

Inserting dU thus yields

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV = \frac{f}{2}Nk_B \frac{dT}{T} + \frac{p}{T}dV,$$

In the next step, we replace dV using the equation of state with

$$dV = \frac{Nk_b}{p}dT - \frac{Nk_b T}{p^2}dp,$$

and obtain

$$dS = \frac{f}{2}Nk_B \frac{dT}{T} + Nk_b \frac{dT}{T} - \frac{Nk_b}{p}dp = 0.$$

Rearranging and integrating this equation yields

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{2} + 1\right) \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T'} &= \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} \\ \rightarrow \left(\frac{T}{T_0}\right)^{f/2+1} &= \frac{p}{p_0}, \end{aligned}$$

and thus

$$\frac{T^{f/2+1}}{p} = \text{const.}$$

Next we insert the equation of state and get

$$\frac{T^{f/2+1}V}{Nk_B T} = \text{const} \rightarrow T^{f/2}V = \text{const},$$

and from that we obtain

$$T^{f/2}V = \text{const} \rightarrow TV^{2/f} = \text{const} \rightarrow \frac{pV^{1+2/f}}{Nk_B} = \text{const} \rightarrow pV^{1+2/f} = \text{const}.$$

Aufgabe 2: (*) Ideales Gas und Carnot Prozess (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Wir betrachten den Carnot-Prozess für ein ideales Gas. Dieser besteht aus vier Schritten:

- Isotherme Expansion von Volumen V_1 zu Volumen V_2 bei Temperatur T_1 .
- Adiabatische Expansion von Volumen V_2 zu Volumen V_2' . Dabei reduziert sich die Temperatur von T_1 zu T_2 .
- Isotherme Kompression von Volumen V_2' zu Volumen V_1' bei Temperatur T_2 .
- Adiabatische Kompression von Volumen V_1' zu Volumen V_1 bei einer Temperaturerhöhung von T_2 zu T_1 .

Nachdem das System diese vier Schritte durchlaufen hat befindet es sich wieder im Ausgangszustand mit Volumen V_1 und Temperatur T_1 .

- a) Bestimmen Sie für jeden Schritt die Arbeit, die von diesem System geleistet und die Wärme, die aufgenommen/abgegeben wird.

Solution

- Isothermal expansion from V_1 to V_2

The work performed by the system can be calculated with

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p(V, T_1) dV = Nk_B T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = Nk_B T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Since the internal energy of the gas does not depend on the volume, it remains unchanged and therefore we have

$$Q_1 = W_1 = Nk_B T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

- Adiabatic expansion from T_1 to T_2 , where $T_2 < T_1$

Adiabatic processes have the property $\delta Q = 0$. The work of the system therefore corresponds to the change in the internal energy.

$$W_2 = \frac{f}{2} Nk_B (T_1 - T_2).$$

- Isothermal compression from V_2' to V_1' .

Analogous to step 1, this leads to

$$Q_3 = W_3 = Nk_B T_2 \ln \left(\frac{V_1'}{V_2'} \right).$$

- Adiabatic compression from T_2 to T_1

Again, we have $\delta Q = 0$ and using the same calculation as in step 2, we obtain

$$W_4 = \frac{f}{2} Nk_B (T_2 - T_1).$$

- b) Im zweiten und vierten Schritt ändert sich neben der Temperatur auch das Volumen. Das Verhältnis zwischen V_2 und V_2' sowie zwischen V_1 und V_1' kann über die Relationen in Aufgabe 1(b) gefunden werden. Bestimmen Sie damit den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses aus den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe.

Solution

We have the following relations

$$V_2' = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{f/2}, V_1' = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{f/2}.$$

The Carnot efficiency indicates the ratio of work output to heat input. The heat input corresponds to Q_1 which then leads to

$$\eta = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{Q_1}.$$

With $W_2 = -W_4$, $W_1 = Q_1$ and $W_3 = Q_3$ this simplifies to

$$\eta = 1 + \frac{Q_3}{Q_1} = 1 + \frac{T_2 \ln \left(\frac{V_1'}{V_2'} \right)}{T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

- c) Der inverse Carnot-Prozess kann als eine Wärmepumpe angesehen werden und in diesem Kontext definiert man die *Heizeffektivität* als das Verhältnis der übertragenen Wärme an das heißere Bad (Q) und der vom System aufgenommenen Arbeit (W)

$$\eta^H = \frac{Q}{W}.$$

Drücken Sie η^H durch die Temperaturen T_1 und T_2 aus. Diskutieren Sie anschließend wann eine Wärmepumpe am effektivsten ist.

Solution

The work input of the inverse Carnot process is equal to the work output of the Carnot process

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4,$$

and the heat transferred to the hotter bath corresponds

$$Q = Q_1.$$

In total we obtain

$$\eta^H = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_3} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

The efficiency of the heat pump is highest when $T_1 \approx T_2$.

Aufgabe 3: Legendre-Transformation

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve an, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U -Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ wird als Legendre-

Transformierte von $U(S)$ bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

- a) Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch $dU(S) = T(S)dS$ und $dF(T) = -S(T)dT$ gegeben sind.

solution

We have

$$F = F(T) = U(S(T)) - S(T)T,$$

and therefore

$$dF = \frac{\partial U}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial T} dT - \frac{\partial S}{\partial T} T dT - S(T) dT.$$

Since $T = \partial U / \partial S$ is the slope of the function $U(S)$, the first two terms cancels each other and we get

$$dF(T) = -S(T)dT.$$

- b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S , negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichen Vorzeichen der Krümmungen. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U / \partial S|_V$ sowie $-P = \partial U / \partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S, V)$ nach S und $P(S, V)$ nach V definiert Funktionen $S(T, V)$ und $V(S, P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T, V)$ und $H(S, P)$.

solution

For the internal energie $U(S, V)$ we get

$$dU(S, V) = T(S, V)dS - P(S, V)dV,$$

The Legendre transformation leads to

$$F(T, V) = U(S(T, V), V) - S(T, V)T,$$

and we get the following differential for F

$$\begin{aligned} dF(T, V) &= TdS - P(S(T, V), V)dV - S(T, V)dT - TdS \\ &= -S(T, V)dT - P(S(T, V), V)dV. \end{aligned}$$

For the enthalpy we obtain

$$H(S, P) = U(S, V(S, P)) + V(S, P)P,$$

and the differential

$$\begin{aligned} dH(S, P) &= T(S, V(S, P))dS - PdV + V(S, P)dP + PdV \\ &= T(S, V(S, P))dS + V(S, P)dP. \end{aligned}$$

Freiheitsgrade

$$\textcircled{1} S(U, V, N) = S_0 \frac{N}{N_0} + N k_B \left[\frac{f}{2} \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) - \frac{f+2}{2} \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \right]$$

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V, N} = \frac{1}{T}; \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U, N} = \frac{P}{T}; \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U, V} = -\frac{\mu}{T}$$

a) (i) thermische Zustandsgleichung: $p \cdot V = N k_B T$

(ii) kalorische Zustandsgleichung: $U = \frac{f}{2} N k_B T$

$$\hookrightarrow \text{(i): } \frac{\partial S}{\partial V} = N k_B \frac{1}{V} = \frac{P}{T} \Rightarrow p \cdot V = N k_B T \quad \checkmark$$

$$\hookrightarrow \text{(ii): } \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{f}{2} N k_B \frac{\partial}{\partial U} (\ln(U) - \ln(U_0)) = \frac{f}{2} N k_B \frac{1}{U} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow U = \frac{f}{2} N k_B T \quad \checkmark$$

b) adiabatisch: $dS = 0$, konstante Teilchenzahl $N = \text{const.}$

$$\Rightarrow dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

$$\Leftrightarrow dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV = 0 \quad \checkmark$$

$$\stackrel{a)}{\Leftrightarrow} \frac{f}{2} N k_B \frac{dT}{T} + N k_B \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{T_1}^{T_2} \frac{f}{2} \frac{dT}{T} = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f}{2} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = - \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{f}{2}}\right) = \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{f}{2}} = \frac{V_1}{V_2}$$

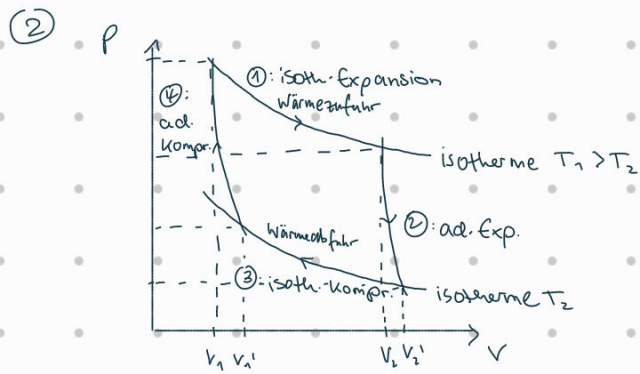
$$\Leftrightarrow V_2 T_2^{\frac{f}{2}} = V_1 T_1^{\frac{f}{2}}$$

$$\Leftrightarrow VT^{\frac{f}{2}} = \text{const.} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow V \left(\frac{pV}{Nk_B} \right)^{\frac{f}{2}} = \text{const.}$$

$$\Leftrightarrow p^{\frac{f}{2}} V^{\frac{f+2}{2}} = \text{const.} \quad | \cdot \left(\right)^{\frac{2}{f}}$$

$$\Leftrightarrow pV^{\frac{f+2}{f}} = \text{const.} \quad (\text{Isentropen/Adiabaten-Gleichung}) \quad \checkmark \quad \Sigma(4/4)$$



a) ①: isotherme Expansion ($T=T_1, V_1 \rightarrow V_2 > V_1$):

$$dU = \delta Q - \delta W = 0 \Leftrightarrow \delta Q = \delta W \Leftrightarrow \delta Q = p dV = \delta W$$

$$\Rightarrow W_{\text{①}} = \int_{V_1}^{V_2} dV p = \int_{V_1}^{V_2} dV Nk_B T_1 \frac{1}{V} = Nk_B T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = Q_{\text{①}} > 0 \quad \checkmark$$

②: adiabatische Expansion ($\delta Q=0, T_1 \rightarrow T_2 < T_1, V_2 \rightarrow V_2'$):

$$-dU = -N \frac{f}{2} k_B dT = \delta W$$

$$\Leftrightarrow W_{\text{②}} = -N \frac{f}{2} k_B \int_{T_1}^{T_2} dT = -N \frac{f}{2} k_B (T_2 - T_1) = N \frac{f}{2} k_B (T_1 - T_2) \quad \checkmark$$

③: isotherme Kompression ($T=T_2, V_2' \rightarrow V_1' < V_2'$):

$$W_{\text{③}} = \int_{V_2'}^{V_1'} Nk_B T_2 \frac{1}{V} = Nk_B T_2 \ln\left(\frac{V_1'}{V_2'}\right) = Q_{\text{③}} < 0 \quad \checkmark$$

④: adiabatische Kompression ($\delta Q=0, T_2 \rightarrow T_1 > T_2, V_1' \rightarrow V_1 < V_1'$):

$$W_{\text{④}} = -N \frac{f}{2} k_B \int_{T_2}^{T_1} dT = -N \frac{f}{2} k_B (T_1 - T_2) = -W_{\text{②}} > 0 \quad \checkmark$$

b) a) $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{f}{2}} = \frac{V_1}{V_2} \Leftrightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{f}{2}}, V_1 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{f}{2}}$

$$\Rightarrow V_2' = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{f}{2}}, V_1' = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{f}{2}} \quad \checkmark$$

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = \frac{\Delta W}{Q_{\text{①}}} = \frac{W_{\text{①}} + W_{\text{②}} + W_{\text{③}} + W_{\text{④}}}{Q_{\text{①}}}$$

$$= \frac{W_{\text{②}} + W_{\text{③}}}{Q_{\text{①}}} = \frac{N k_B T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + N k_B T_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{N k_B T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad \checkmark$$

$$= \frac{N k_B T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - N k_B T_2 \ln\left(\frac{V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}\right)}{N k_B T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \eta^{\#} &= \frac{\text{übertragene Wärme an heißes Bad}}{\text{aufgenommene Arbeit}} = \frac{Q_1}{W_{\text{①}} + W_{\text{③}}} = \frac{N k_B T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{N k_B T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - N k_B T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \\ &= \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Wann ist die Wärmepumpe am effektivsten?

• $\eta^{\#}$ wird größer für kleine $\Delta T = T_1 - T_2$

↳ Wärmepumpe ist am effektivsten, wenn die Temperaturen von Wärme- und Kältebad nah beieinander liegen.

✓ Σ(10/10) ☺

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 10

Abgabe: 23.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 27.01.2026

Aufgabe 1: Zentraler Grenzwertsatz

Es sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X_n}(x) = \frac{n^x e^{-n}}{x!} \quad \text{mit } x = 0, 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie, dass sich die Verteilung der Größe

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

im Limit $n \rightarrow \infty$ der einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ annähert.

Hinweis: Leiten Sie die Momenterzeugende Funktion $M_{X_n}(t)$ von X_n her, indem Sie die Gleichung

$$M_{X_n}(t) = \langle e^{tX_n} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle X_n^k \rangle}{k!} t^k,$$

benutzen und zeigen Sie danach, dass sich $M_{(X_n - n)/\sqrt{n}}(t)$ im betrachteten Limit der Momenterzeugenden Funktion der Normalverteilung annähert.

Solution

We start with

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) &= \langle e^{tX_n} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle X_n^k \rangle}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{x=0}^{\infty} x^k f_{X_n}(x)}{k!} t^k \\ &= e^{-n} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{n^x}{x!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k t^k}{k!} \right) = e^{n(e^t - 1)} \end{aligned}$$

In the next step, we derive

$$M_{\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}}(t) = \langle e^{t \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}} \rangle = e^{-t\sqrt{n}} \langle e^{t \frac{X_n}{\sqrt{n}}} \rangle = e^{-t\sqrt{n} + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1)}.$$

In the $n \rightarrow \infty$ limit, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{t^4}{24n} + \dots} = e^{\frac{t^2}{2}},$$

which agrees with the moment generating function of the normal distribution $\mathcal{N}(0, 1)$.

Aufgabe 2: (*) Phasenraumdichte und Liouville-Gleichung (6 Punkte)

- a) Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. Skizzieren Sie den Phasenraum $(\{x, p\})$ für eine gegebene Amplitude A_0 und gegebene Frequenz ω_0 . Wie sieht der Phasenraum für Amplituden $A_1 > A_0$ und $A_2 < A_0$ aus? Wie verändert sich der Phasenraum für $\omega_1 > \omega_0$ und $\omega_2 < \omega_0$?

Solution

The phase space for an harmonic oscillator is an ellipse in the coordinate system $\{x, p\}$. For example, we have

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t)$$

for $x(t)$ and

$$p(t) = mv(t) = m\dot{x}(t) = mA_0\omega \cos(\omega t)$$

for $p(t)$, which can be combined into an ellipse. For $A_1, A_2 \neq A_0$ both $x(t)$ and $p(t)$ are rescaled, so that this changes only the scaling of the ellipse. The change of the frequency only rescales $p(t)$ while $x(t)$ is not affected. Thus, the ellipse is either stretched or.

- b) Betrachten Sie eine rotierende Scheibe mit Trägheitsmoment I . Es bietet sich an, das System mit den Koordinaten $\{\varphi, p_\varphi\}$ zu beschreiben, wobei φ der Drehwinkel und p_φ der konjugierte kanonische Impuls ist. Dann ist die Hamiltonfunktion gegeben durch $H = p_\varphi^2/(2I)$. Stellen Sie die Liouville-Gleichung für die Phasenraumdichte $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$ auf. Sie erhalten eine Gleichung, die die zeitliche Ableitung von ρ und die Ableitung nach φ in Beziehung setzt.

Solution

We obtain for the Liouville equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{H, \rho\} = -\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial p_\varphi}\right) = -\frac{p_\varphi}{I} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}.$$

- c) Verwenden Sie die doppelte Fourier-Transformation

$$\rho = \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i\omega t} e^{-ik\varphi},$$

um aus der Differentialgleichung eine algebraische Gleichung zu erhalten. Daraus können Sie die Dispersionsrelation ableiten. Wie lautet diese?

Solution

When we insert the relation for $\rho(t)$ from the first part, we obtain the dispersion relation;

$$\int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) i\omega e^{i\omega t} e^{-ik\varphi} = -\frac{p_\varphi}{I} \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i\omega t} (-ik) e^{-ik\varphi}$$

$$\rightarrow \omega = k \frac{p_\varphi}{I}$$

d) Bei der Rücktransformation von k nach φ

$$\rho = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i(\omega t - k\varphi)}$$

können Sie annehmen, dass $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 = \text{const.}$ ist. Außerdem sollten Sie die Dispersionsrelation verwenden. Welchen Ausdruck erhalten Sie für ρ ?

Solution

We use the dispersion relation and replace $\tilde{\rho}$ with $\tilde{\rho}_0$. This leads to

$$\rho = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i(\omega t - k\varphi)} = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}_0 e^{ik(\frac{p_\varphi}{I}t - \varphi)} = \tilde{\rho}_0 \delta \left[\frac{p_\varphi t}{I} - \varphi \right],$$

where we used

$$\int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \delta(x).$$

e) Interpretieren Sie das Ergebnis aus (c) in der $\varphi - p_\varphi$ -Ebene falls $\tilde{\rho}_0$ nur für $p_\varphi \in [L_0 - \Delta L, L_0 + \Delta L]$ von Null verschieden ist und dann den Wert $\tilde{\rho}_0 = 1/(2\Delta L)$ annimmt. Welche geometrische Form hat der Phasenraum?

Solution

In this case we obtain

$$\rho = \frac{1}{2\Delta L} \delta \left[\frac{p_\varphi t}{I} - \varphi \right]$$

in the region where ρ does not vanish. The phase-space density is given by a straight line, which moves depending on the time. For $t = 0$ this line is on the p_φ axis. For $t \neq 0$ we obtain from delta function the condition $\varphi = t p_\varphi / I$, which fixes the value of φ . For increasing t , this straight line tilts.

f) Verwenden Sie $\rho(\varphi, p_\varphi, t)$ aus (e), um den Mittelwert von φ und die Standardabweichung zu berechnen. Diskutieren Sie die Abhängigkeiten von t .

Solution

We calculate first the average of φ :

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{2\Delta L} \int_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L} dp_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \delta \left[\frac{p_\varphi t}{I} - \varphi \right] \varphi = L_0 \left(\frac{t}{I} \right).$$

In a similar way we get

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{t^2}{3I^2} (3L_0^2 + \Delta L^2),$$

and the standard deviation is given by

$$\sqrt{(\langle \varphi \rangle^2 - \langle \varphi^2 \rangle)} = \frac{\Delta L t}{\sqrt{3}I}.$$

Aufgabe 3: (*) Dichtematrix (1 + 2 + 1 = 4 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines Spin-1/2 Systems

$$H = gB \frac{\hbar}{2} \sigma_x,$$

mit den Pauli Spin-Operatoren

$$\begin{aligned}\sigma_x &= |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \\ \sigma_y &= -i |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + i |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \\ \sigma_z &= |\uparrow\rangle \langle \uparrow| - |\downarrow\rangle \langle \downarrow|,\end{aligned}$$

wobei die Zustände $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ die Eigenzustände zu σ_z sind. Die Dichtematrix $\rho(t)$ sei zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\rho(t = 0) = p_z |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + p_x |\uparrow\rangle_x \langle \uparrow|_x,$$

mit $p_z, p_x > 0$, $p_z + p_x = 1$ und $\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ sind die Eigenzustände zu σ_x . Die Zeitentwicklung der Dichtematrix ist gegeben durch $\rho(t) = \exp(-iHt/\hbar)\rho(0)\exp(iHt/\hbar)$.

- a) Drücken Sie die Vektoren $\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ aus.

Solution

The vectors $\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ in the basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ can be obtained by calculating the eigenvectors to σ_x . These eigenvectors are then given by

$$\begin{aligned}|\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \\ |\downarrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle).\end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie $\rho(t)$ für $t \geq 0$.

Solution

The time evolution operator can be written as

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) = \exp(-i\omega t \sigma_x) = \cos(\omega t) - i\sigma_x \sin(\omega t),$$

with $\omega = gB/2$. Using the relation of part a), we rewrite $\rho(0)$ as

$$\rho(0) = \frac{p_z}{2} (1 + \sigma_z) + \frac{p_x}{2} (1 + \sigma_x),$$

where we used the definition of σ_3 , $|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = 1$ and

$$|\uparrow\rangle\langle\uparrow| = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) + \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) = \frac{1}{2} (1 + \sigma_z).$$

Next we calculate the following commutator

$$[U(t), \rho(0)] = -i \sin(\omega t) \left(\frac{p_z}{2} [\sigma_x, \sigma_z] + \frac{p_x}{2} [\sigma_x, \sigma_x] \right) = -p_z \sin(\omega t) \sigma_y,$$

where we used $[\sigma_x, \sigma_z] = -2i\sigma_y$. Finally, $\rho(t)$ is given by

$$\begin{aligned} \rho(t) &= U(t)\rho(0)U^\dagger(t) = \rho(0)U(t)U^\dagger(t) + [U(t), \rho(0)]U^\dagger \\ &= \frac{p_x + p_z}{2} + \frac{p_x}{2}\sigma_x - \frac{p_z}{2}\sin(2\omega t)\sigma_y + \left(\frac{p_z}{2} - p_z \sin^2(\omega t)\right)\sigma_z \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie $\langle\sigma_j\rangle(t) = \text{Tr}[\rho(t)\sigma_j]$ für $j = x, y, z$.

Solution

For the expectation values we need the traces

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma_i) &= 0, \\ \text{Tr}(\sigma_i\sigma_j) &= \text{Tr}(\sigma_j\sigma_i) = \text{Tr}(-\sigma_i\sigma_j + 2\delta_{ij}) \rightarrow \text{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}, \end{aligned}$$

where we used in the first step the cyclicity of trace and in the second $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$. The expectation values are then given by

$$\begin{aligned} \langle\sigma_x\rangle(t) &= \text{Tr}(\rho(t)\sigma_x) = p_x \\ \langle\sigma_y\rangle(t) &= \text{Tr}(\rho(t)\sigma_y) = -p_z \sin(2\omega t) \\ \langle\sigma_z\rangle(t) &= \text{Tr}(\rho(t)\sigma_z) = p_z (1 - 2\sin^2(\omega t)) = p_z \cos(2\omega t). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Oberfläche der Einheitskugel

Berechnen Sie die Oberfläche der Einheitskugel in d Dimensionen. Kontrollieren Sie Ihr Resultat für $d = 1, 2, 3$.

Hinweis: Betrachten Sie dafür das Integral

$$I_d = \int_{\mathbb{R}^d} dx \exp(-|\vec{x}|^2),$$

und berechnen Sie im ersten Schritt das Integral, indem Sie es in d eindimensionale Integrale aufspalten. Im zweiten Schritt benutzen Sie d -dimensionale Kugelkoordinaten um die Integra-

tion in eine Radial- und Winkelintegration aufzuteilen, um daraus den Oberflächeninhalt zu bestimmen.

Solution

The surface of a unit sphere in d dimensions is defined as

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 = |x|^2 = 1.$$

For the calculation of the surface we consider first the following integral

$$I_d = \int_{\mathbb{R}^d} dx \exp(-|x|^2) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp(-x_1^2) \right)^d = I_1^d$$

In spherical coordinates the integral I_d can be written as

$$I_d = \int_0^{\infty} dr \int d\Omega_d \exp(-r^2) r^{d-1},$$

where the surface of the unit sphere in d dimensions is given by

$$O_d(1) = \int d\Omega_d.$$

Solution

We know already the solution of the integral $I_d = I_1^d = \sqrt{\pi}^d$. The integral over the radial part can be obtained by considering the definition of the Gamma function

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^n = \Gamma(n+1).$$

$$\int_0^{\infty} dr \exp(-r^2) r^{d-1} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{\frac{d}{2}-1} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right),$$

where we used the substitution $r^2 = t$. Therefore, we obtain for the surface

$$O_d(1) = \frac{2\sqrt{\pi}^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$

We check our results by considering $d = \{1, 2, 3\}$:

$$O_1(1) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)} = 2$$

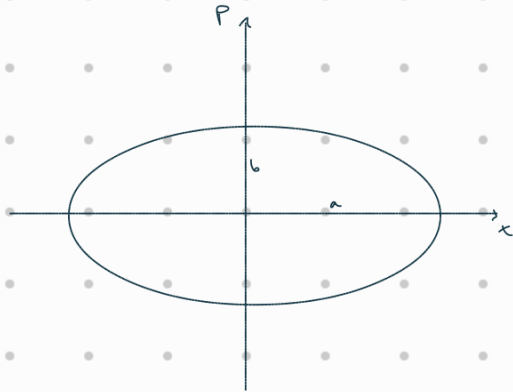
$$O_2(1) = \frac{2\sqrt{\pi}^2}{\Gamma(2/2)} = 2\pi$$

$$O_3(1) = \frac{2\sqrt{\pi}^3}{\Gamma(3/2)} = \frac{4\sqrt{\pi}^3}{\Gamma(1/2)} = 4\pi.$$

$$\textcircled{2a)} H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2E} = 1 := \frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \quad (\text{vgl. Ellipsengleichung } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$$

↳ Der Phasenraum des eindimensionalen harm. Oszillators bildet eine Ellipse mit den Halbachsen a und b :



Konkret z.B. $x(t) = A_0 \sin(\omega t) \rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = mA_0 \cos(\omega t)$

- $A_1 > A_0$ und $A_2 < A_0$: Die Amplituden von x und p ändern sich und die Ellipse wird größer und kleiner skaliert.
- $\omega_1 > \omega_0$, $\omega_2 < \omega_0$: Die Amplitude von p ändert sich (Amplitude von x bleibt gleich), die Ellipse wird also gestaucht und gestreckt. ✓

b) rotierende Scheibe mit Trägheitsmoment I mit Drehwinkel φ und konjugiertem kanonischem Impuls $p_\varphi \rightarrow H = \frac{p_\varphi^2}{2I}$

$$\text{Liouville'scher Satz: } \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \right) = \{ H, \rho \}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -\frac{p_\varphi}{I} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \quad \checkmark$$

$$c) \rho = \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i\omega t} e^{-ik\varphi}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{p_\varphi}{I} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$$

$$\Leftrightarrow \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) i\omega e^{i\omega t} e^{-ik\varphi} = -\frac{p_\varphi}{I} \int d\omega \int dk \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i\omega t} (-ik) e^{-ik\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \omega(k) = \frac{p_\varphi}{I} k \quad \checkmark$$

$$d) \text{ Rücktransformation } \rho = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{\rho}(k, p_\varphi, \omega) e^{i(\omega t - k\varphi)} \quad \text{mit } \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \rho = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_0 e^{i(\frac{p_0}{I}kt - k\varphi)} = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_0 e^{-ik(-\frac{p_0}{I}t + \varphi)} = \tilde{f}_0 \delta(-\frac{p_0}{I}t + \varphi) \quad \checkmark$$

$$\text{mit } \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} = \delta(x)$$

e)

$$\tilde{f}_0 = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta L}, & \text{für } p_0 \in [L_0 - \Delta L, L_0 + \Delta L] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{2\Delta L} \delta(\varphi - \frac{p_0 t}{I}) \text{ für den nicht-verschwindenden Bereich}$$

$\Rightarrow \rho$ beschreibt eine sich mit t bewegende Gerade, die für $t=0$ auf der p_0 -Achse liegt. Für $t \neq 0$ muss $p_0 = \frac{I\varphi}{t} \Rightarrow$ Gerade dreht sich \checkmark

$$f) \langle \varphi \rangle = \int_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L} dp_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \varphi \rho(\varphi, p_0, t)$$

$$= \int_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L} dp_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \varphi \frac{1}{2\Delta L} \delta(\varphi - \frac{p_0 t}{I})$$

$$= \frac{1}{2\Delta L} \int_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L} dp_0 \frac{p_0 t}{I} = \frac{1}{2\Delta L} \frac{t}{I} \left[\frac{1}{2} p_0^2 \right]_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{t}{I} [(L_0 + \Delta L)^2 - (L_0 - \Delta L)^2]$$

$$= \frac{1}{4} \frac{t}{I} [L_0^2 + 2L_0\Delta L + \Delta L^2 - L_0^2 + 2L_0\Delta L - \Delta L^2]$$

$$= \frac{1}{4} \frac{t}{I} 4L_0\Delta L = \frac{tL_0}{I} \quad \checkmark$$

$$\langle \varphi^2 \rangle = \int_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L} dp_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \varphi^2 \frac{1}{2\Delta L} \delta(\varphi - \frac{p_0 t}{I})$$

$$= \frac{1}{2\Delta L} \int_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L} dp_0 \frac{p_0^2 t^2}{I^2} = \frac{t^2}{2\Delta L I^2} \left[\frac{1}{3} p_0^3 \right]_{L_0 - \Delta L}^{L_0 + \Delta L}$$

$$= \frac{t^2}{6\Delta L I^2} [(L_0 + \Delta L)^3 - (L_0 - \Delta L)^3]$$

$$= \frac{t^2}{6\Delta L I^2} (L_0^3 + 3L_0^2\Delta L + 3L_0\Delta L^2 + \Delta L^3 - L_0^3 + 3L_0^2\Delta L - 3L_0\Delta L^2 + \Delta L^3)$$

$$= \frac{t^2}{6\Delta L I^2} (6L_0^2\Delta L + 2\Delta L^3) = \frac{t^2}{I^2} (L_0^2 + \frac{1}{3}\Delta L^2)$$

$$\text{std}(\varphi) = \Delta\varphi = \sqrt{\langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2} = \sqrt{\frac{t^2}{I^2} (L_0^2 + \frac{1}{3} \Delta L^2) - (\frac{tL_0}{I})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{t^2 \Delta L^2}{3I^2}} = \frac{t \Delta L}{\sqrt{3} I} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow \langle \varphi \rangle$ und $\Delta\varphi$ sind linear von t abhängig Σ (6/6)

③ Spin- $\frac{1}{2}$ -System mit $H = gB \frac{\hbar}{2} \sigma_x$

mit Pauli-Spin-Operatoren

$$\begin{cases} \sigma_x = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \\ \sigma_y = -i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow| \\ \sigma_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \end{cases}$$

$$\rho(t=0) = p_z |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + p_x |\uparrow\rangle_x \langle\uparrow|_x \quad \text{mit } p_z, p_x > 0, p_z + p_x = 1$$

$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ Eigenzustände zu σ_z

$\{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ Eigenzustände zu σ_x

$$\rho(t) = \exp(-i \frac{Ht}{\hbar}) \rho(0) \exp(i \frac{Ht}{\hbar})$$

a) σ_x hat die Eigenzustände $|\uparrow\rangle_x$ und $|\downarrow\rangle_x$ mit $\text{EW} \pm 1$

Ansatz $|\uparrow\rangle_x = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \sigma_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

• $\text{EW} +1: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow a=b \Rightarrow \text{Normierung } |a|^2 + |b|^2 = 2|a|^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow |\uparrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad \checkmark$$

• $\text{EW} -1: -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow a = -b$

$$\rightarrow |\downarrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \quad \checkmark$$

b) $\rho(t) = \exp(-i \frac{Ht}{\hbar}) \rho(0) \exp(i \frac{Ht}{\hbar})$

$$\rho(0) = p_z \underbrace{|\uparrow\rangle\langle\uparrow|}_{=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + p_x \underbrace{|\uparrow\rangle_x\langle\uparrow|_x}_{=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= p_z (\mathbb{1} + \sigma_z) + p_x (\mathbb{1} + \sigma_x) \quad \checkmark$$

$$\rightarrow \rho(t) = \exp(-\frac{i}{2} g B t \sigma_x) \left(\frac{P_z}{2} (1 + \sigma_z) + \frac{P_x}{2} (1 + \sigma_x) \right) \exp(\frac{i}{2} g B t \sigma_x)$$

$$e^{i a (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})} = \cos a + i (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin a$$

$$= \left(\mathbb{1} \cos\left(\frac{gBt}{2}\right) - i \sin\left(\frac{gBt}{2}\right) \sigma_x \right) \left(\frac{P_z}{2} \sigma_z + \frac{P_x}{2} \sigma_x \right) \left(\mathbb{1} \cos\left(\frac{gBt}{2}\right) + i \sin\left(\frac{gBt}{2}\right) \sigma_x \right)$$

$$\stackrel{gB := \Omega}{=} \frac{1}{2} \mathbb{1} \left(\frac{P_z + P_x}{2} \right) + \mathbb{1} \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \left(\frac{P_z}{2} \sigma_z + \frac{P_x}{2} \sigma_x \right) + i \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \left(\frac{P_z}{2} \sigma_z + \frac{P_x}{2} \sigma_x \right) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \sigma_x + \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \sigma_x \left(\frac{P_z}{2} \sigma_z + \frac{P_x}{2} \sigma_x \right) \sigma_x$$

$$- i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \sigma_x \frac{P_z}{2} \sigma_z \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

$$- i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \sigma_x \frac{P_x}{2} \sigma_x \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{1} + \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \left(\frac{P_z}{2} \sigma_z + \frac{P_x}{2} \sigma_x \right)$$

$$- \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \frac{P_z}{2} \sigma_z + \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \frac{P_x}{2} \sigma_x$$

$$- \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \frac{P_z}{2} \sigma_y - i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \frac{P_x}{2} \mathbb{1}$$

$$- \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \frac{P_z}{2} \sigma_y + i \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \frac{P_x}{2} \mathbb{1}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{1} + \frac{P_x}{2} \sigma_x + \frac{P_z}{2} \sigma_z (\cos(\Omega t) - \sin(\Omega t)) - \frac{P_z}{2} \sigma_y \sin(\Omega t)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\mathbb{1} + P_x \sigma_x + P_z (\sigma_z \cos(\Omega t) - \sigma_y \sin(\Omega t)) \right]$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{P_x}{2} \\ \frac{P_x}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P_z \cos(\Omega t)}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{P_z \cos(\Omega t)}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \frac{P_z \sin(\Omega t)}{2} \\ i \frac{P_z \sin(\Omega t)}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) & \frac{P_x}{2} + i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) \\ \frac{P_x}{2} - i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) & \frac{1}{2} - \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$$

c) $\langle \sigma_j \rangle(t) = \text{Tr}(\rho(t) \sigma_j)$ für $j = x, y, z$

$$\text{Tr}(\rho(t) \sigma_x) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) & \frac{P_x}{2} + i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) \\ \frac{P_x}{2} - i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) & \frac{1}{2} - \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{P_x}{2} + i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) & \frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) \\ \frac{1}{2} - \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) & \frac{P_x}{2} - i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{P_x}{2} + i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) + \frac{P_x}{2} - i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) = P_x$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(P(t)\sigma_y) &= \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) & \frac{P_x}{2} + i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) \\ \frac{P_x}{2} - i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) & \frac{1}{2} - \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} i \frac{P_x}{2} - \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) & -i \left(\frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) \right) \\ i \left(\frac{1}{2} - \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) \right) & -i \frac{P_x}{2} - \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) \end{pmatrix} \right) \\ &= i \frac{P_x}{2} - \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) - i \frac{P_x}{2} - \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) \\ &= -P_z \sin(\Omega t) / \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(P(t)\sigma_z) &= \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) & \frac{P_x}{2} + i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) \\ \frac{P_x}{2} - i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) & \frac{1}{2} - \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) & -\frac{P_x}{2} + i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) \\ \frac{P_x}{2} - i \frac{P_z}{2} \sin(\Omega t) & -\frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) - \frac{1}{2} + \frac{P_z}{2} \cos(\Omega t) = P_z \cos(\Omega t) / \quad \checkmark \quad \mathcal{E}(414) \end{aligned}$$

$\mathcal{E}(101101)$ ☺

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 11

Abgabe: 30.01.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 03.02.2026

Aufgabe 1: (*) Mischung von idealen Gasen (2 + 2 = 4 Punkte)

Der Erwartungswert eines Operators O berechnet sich über

$$\langle O \rangle = \int \frac{d^{3N}p d^{3N}q}{(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{1}{N!} \rho O,$$

wobei ρ die Dichtematrix ist. Dabei wurde der Faktor $1/N!$ aufgrund der Ununterscheidbarkeit der Teilchen eingeführt. Überzeugen Sie sich davon (vgl. Vorlesung), dass auf der Basis obiger Gleichung die Entropie eines idealen Gases gegeben ist durch

$$S = kN \log(V/N) + \dots,$$

wobei Terme, die hier nicht von Interesse sind, nicht explizit angegeben sind. Falls der Faktor $1/N!$ nicht vorhanden ist, erhält man für die Entropie

$$S_{\text{kl}} = kN \log(V) + \dots$$

Betrachten Sie nun ein isoliertes System, das in zwei gleich große Kammern mit Volumen V aufgeteilt ist. Diese sind durch eine Trennwand separiert. In jedem befindet sich ein ideales Gas. Die Trennwand wird nun entfernt, so dass eine quasistatische (aber irreversible) Durchmischung stattfindet. Berechnen Sie die Änderung der Entropie für folgende Fälle

- a) In beiden Kammern befinden sich unterschiedliche ideale Gase.

Solution

For distinguishable particles, the change of entropy is

$$\Delta S = S' - 2S = 2kN \log(2V/N) - 2kN \log(V/N) = 2kN \log(2),$$

and

$$\Delta S_{\text{kl}} = S' - 2S = 2kN \log(2V) - 2kN \log(V) = 2kN \log(2).$$

We see that $\Delta S = \Delta S_{\text{kl}}$, which implies that classically we actually treat particles to be distinguishable.

- b) In beiden Kammern befinden sich das gleiche ideale Gase.

Solution

For indistinguishable particles, the change of entropy is

$$\Delta S = S' - 2S = 2kN \log\left(\frac{2V}{2N}\right) - 2kN \log(V/N) = 0,$$

and

$$\Delta S_{\text{kl}} = S' - 2S = 2kN \log(2V) - 2kN \log(V) = 2kN \log(2).$$

We see that $\Delta S \neq \Delta S_{\text{kl}}$ for indistinguishable (identical) particles, and the classical entropy S_{kl} is not *extensive*, but the entropy S is a proper *extensive* quantity.

Verwenden Sie sowohl S als auch S_{kl} . Interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2: (*) Ideales Gas (3 + 3 = 6 Punkte)

Das ideale Gas beschreibt ein System aus N identischen, nicht wechselwirkenden Teilchen in einem Volumen V . Wir unterscheiden zwischen zwei Arten von idealem Gas, dem Fermi- und Bose-Gas. Zusätzlich lässt sich ein nützliches mathematisches Modell definieren, das sogenannte Boltzmann-Gas oder ideale Gas.

- (a) Impuls und Position von klassischen Teilchen sind kontinuierlich und scharf messbar. Die kanonische Zustandssumme des Boltzmann-Gases hat die Form

$$Z_N \propto \int \frac{1}{N!} e^{-\beta H(x,p)} d^{3N}x d^{3N}p.$$

Führen Sie einen Parameter (bzw. ein Integral-Maß) h ein um die Zustandssumme dimensionslos zu machen. Zeigen Sie, dass gilt $Z_N = Z_1^N / N!$, wobei Z_1 die Zustandssumme von einem Teilchen ist und berechnen Z_N . Berechnen Sie daraus die Freie Energie und bestimmen Sie die Entropie. Zeigen Sie, dass die Entropie von der Wahl von h abhängt und finden Sie die neue Entropie wenn Sie h mit α reskalieren.

Solution

Since the particles are non-interacting, the Hamiltonian is simply the sum of the free single-particle Hamiltonians

$$H(x, p) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} \equiv \sum_i H_{\text{single}}(x_i, p_i),$$

where p_i is the momentum of the i -th particle. Using the integration measure h for $dx dp$ and the correct Gibb's factor $1/N!$, the N -particle partition function is therefore

$$Z_N = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N}x d^{3N}p e^{-\beta H(x,p)} = \frac{1}{N!} Z_{\text{single}}^N,$$

with the single-particle partition function Z_{single} . To evaluate this expression, we use the identity $\int dx x^2 e^{-cx^2} = (-1) \frac{d}{dc} \left(\int dx e^{-cx^2} \right)$ and the Gaussian integral $2 \int_0^\infty dx e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$ for $c > 0$. Z_{single} is therefore equal to

$$Z_{\text{single}} = \frac{V}{h^3} \int d^3p e^{-\beta p^2/2m} = \frac{V}{\lambda^3}.$$

We defined here $\lambda = \sqrt{\frac{\beta h^2}{2\pi m}}$. This is the thermal de-Broglie wavelength if the 'correct' integration measure is used, i.e. Planck's constant.

Hence we find

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N.$$

Using Stirling's formula $\log N! = N \log(N) - N + O(\log(N))$ we can calculate the thermodynamic potentials and from that the entropy and equation of state

$$F = -kT \log Z_N \approx -kTN \left(\log \frac{V}{N\lambda^3} + 1 \right),$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = kN \left(\log \frac{V}{N\lambda^3} + \frac{5}{2} \right),$$

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{NkT}{V}.$$

Note that both the entropy and free energy depend on the integration measure h which cannot be derived from classical physics. If we rescale h by α the new entropie is given by

$$S' = kN \left(\log \frac{V}{N\alpha^3 \lambda^3} + \frac{5}{2} \right) = S - 3kN \log \alpha$$

(b) Betrachten Sie nun ein quantenmechanisches System. Bestimmen Sie Z_N über

$$Z_N = \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \right] = \sum_n \langle \Phi_n | e^{-\beta E_n} | \Phi_n \rangle,$$

wobei H der Hamilton-Operator eines freien Teilchens ist und die Wellenfunktionen im Ortsraum gegeben sind durch

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \Phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\theta \in S_N} (\pm 1)^\theta \phi_{\vec{p}_1}(\vec{x}_{\theta_1}) \dots \phi_{\vec{p}_N}(\vec{x}_{\theta_N}), \quad \phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}},$$

mit $+, -$ für Bosonen und Fermionen. S_N ist die Menge aller möglichen Permutationen, die keinen neuen Zustand erzeugen. Zeigen Sie, dass der führende Term von Z_N im thermodynamischen Limes bei hohen Temperaturen mit dem klassischen Ergebnis aus (a) übereinstimmt. Benutzen Sie dafür das Maß $h = 2\pi\hbar$ für $dx dp$.

Hinweis: Die Summe in Z_N kann im thermodynamischen Limes durch ein Integral ersetzt werden:

$$\sum_n \rightarrow \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right)^N \int d^{3N}p$$

Solution

In quantum mechanics, the momenta and energies of particles in a box with volume $V = L^3$ are quantized as

$$H|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle, \quad E_n = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, \quad \vec{p}_i = \frac{2\pi}{L}\hbar\vec{n}_i, \quad \vec{n}_i \in \mathbb{Z}^3,$$

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \Phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\theta \in S_N} (\pm 1)^\theta \phi_{\vec{p}_1}(\vec{x}_{\theta_1}) \dots \phi_{\vec{p}_N}(\vec{x}_{\theta_N}), \quad \phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}},$$

with the $+, -$ sign for bosons and fermions, respectively, and S_N is the set of possible permutations that do not create any new states. In the thermodynamic limit $V \rightarrow \infty$, the momenta become continuous

$$\sum_n \rightarrow \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right)^N \int d^{3N}p,$$

where the factor $1/N!$ takes into account that permutations of the momenta \vec{p}_i in Φ_n do not create any new states. Inserting $\mathbf{1} = \int d^{3N}x |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N|$ into the trace formula, we find the partition function

$$\begin{aligned} Z_N &= \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \right] = \sum_n \langle \Phi_n | e^{-\beta E_n} | \Phi_n \rangle \\ &= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right)^N \int d^{3N}x d^{3N}p \langle \Phi_n | \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N \rangle \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \Phi_n \rangle e^{-\beta E_n} \\ &= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right)^N \int d^{3N}x d^{3N}p \frac{1}{N! V^N} \sum_{\theta, \theta'} (\pm 1)^{\theta+\theta'} e^{i\vec{p}_1(\vec{x}_{\theta_1} - \vec{x}_{\theta'_1})/\hbar} \dots e^{-\beta E_n} \\ &= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right)^N \int d^{3N}x d^{3N}p \frac{1}{V^N} \sum_{\theta} (\pm 1)^\theta e^{i\vec{p}_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_{\theta_1})/\hbar} \dots e^{-\beta E_n}. \end{aligned}$$

The integral over the momenta is a Gaussian integral

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\beta p^2/(2m) + i\vec{p}\vec{x}/\hbar} = \frac{1}{\lambda^3} e^{-\frac{\pi x^2}{\lambda^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}},$$

with the thermal de-Broglie wavelength λ already introduced in exercise part (a). With this we find the partition function of the quantum gas

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N \int \frac{d^{3N}x}{V^N} \sum_{\theta} (\pm 1) \left[e^{-\frac{\pi}{\lambda^2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_{\theta_1})^2} \dots e^{-\frac{\pi}{\lambda^2}(\vec{x}_n - \vec{x}_{\theta_n})^2} \right] \\ &= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N \int \frac{d^{3N}x}{V^N} \left[1 \pm \sum_{i < j} e^{-\frac{2\pi}{\lambda^2}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2} + (3 \text{ particle term}) + \dots \right], \end{aligned}$$

where we expanded the sum into the number of permuted particles. In the high temperature limit $T \rightarrow \infty$, the wavelength goes to zero $\lambda \rightarrow 0$ and only the first term is non-vanishing. More generally as long as $(\frac{V}{N})^{2/3} \sim \langle (\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2 \rangle \gg \lambda^2$, i.e. at small densities, the leading term is

$$Z_N \approx \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N,$$

which coincides with the classical partition function of the Boltzmann gas for the integration measure $h = 2\pi\hbar$.

Aufgabe 3: Zustandsdichte

Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen in einem D -dimensionalen Kasten der Kantenlänge L , für das die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon(p)$ besteht. Die Zustandsdichte $\mathcal{N}(\epsilon)$ ist definiert als

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \delta(\epsilon - \epsilon(p)).$$

Es sei nun $\epsilon(|\vec{p}|) = \alpha|\vec{p}|^n$. Bestimmen Sie $\mathcal{N}(\epsilon)$ für $D = 1, 2, 3$. Geben Sie insbesondere die Ergebnisse für Elektronen ($\epsilon(p) = |\vec{p}|^2/(2m)$) und Photonen ($\epsilon(p) = c|\vec{p}|$) an.

Solution

We calculate first the state density for general D and $\epsilon(p) = \alpha p^n$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \delta(\epsilon - \alpha p^n) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d\Omega_D \int_0^\infty dp p^{D-1} \delta(\epsilon - \alpha p^n) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{1}{n\alpha p^{n-1}} \delta\left(p - \left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)^{1/n}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{n\alpha} \left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)^{(D-n)/n}, \end{aligned}$$

where we used the result of exercise 4 on last sheet for the angular integration of the surface in D dimensions. From the delta distribution we only get one contribution due to the integration limits.

Therefore, we get the following state density for the electron

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} 2m (2m\epsilon)^{(D-2)/2} = \frac{1}{\epsilon \Gamma(D/2)} \left(\frac{\epsilon m}{2\pi\hbar^2}\right)^{(D/2)},$$

which then leads to

$$\mathcal{N}^{D=3}(\epsilon) = \frac{m^{3/2}\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}, \quad \mathcal{N}^{D=2}(\epsilon) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}, \quad \mathcal{N}^{D=1}(\epsilon) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\epsilon}\pi\hbar}.$$

For the photon we get

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{2}{\epsilon \Gamma(D/2)} \left(\frac{\epsilon}{2c\hbar\sqrt{\pi}}\right)^D,$$

and

$$\mathcal{N}^{D=3}(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\pi^2(\hbar c)^3}, \quad \mathcal{N}^{D=2}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2\pi(\hbar c)^2}, \quad \mathcal{N}^{D=1}(\epsilon) = \frac{1}{\pi\hbar c}.$$

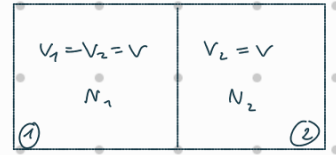
① Erwartungswert des Operators \hat{O} : $\langle O \rangle = \int \frac{d^{3N}p d^{3N}q}{(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{1}{N!} \rho^O$

$\begin{matrix} \text{Dichtematrix} \\ \downarrow \\ \rho^O \\ \uparrow \\ \text{wg. Ununterscheidbarkeit} \\ N! \end{matrix}$

o $\rightarrow S = kN \ln\left(\frac{V}{N}\right) + \dots$

o klassisch (Teilchen unterscheidbar) erhält man

$S_{cl} = kN \ln(V) \rightarrow$ Zahl der Mikrozustände wird überschätzt, weil Permutationen identischer Teilchen gezählt werden



a) unterschiedliche ideale Gase:

o mit Ununterscheidbarkeit

vorher: $S_1 = kN_1 \ln\left(\frac{V}{N_1}\right) + \dots$; $S_2 = kN_2 \ln\left(\frac{V}{N_2}\right) + \dots$

$\rightarrow S_1 + S_2 = k\left(N_1 \ln\left(\frac{V}{N_1}\right) + N_2 \ln\left(\frac{V}{N_2}\right)\right) + \dots$

nachher: $S_{ges} = kN_1 \ln\left(\frac{2V}{N_1}\right) + kN_2 \ln\left(\frac{2V}{N_2}\right) + \dots$

$\Rightarrow \Delta S = k\left(N_1 \ln\left(\frac{2V}{N_1}\right) + N_2 \ln\left(\frac{2V}{N_2}\right)\right) - k\left(N_1 \ln\left(\frac{V}{N_1}\right) + N_2 \ln\left(\frac{V}{N_2}\right)\right) + \dots$

$= k \ln(2) (N_1 + N_2) + \dots$ ✓

o klassisch:

vorher: $S_{ges} = S_1 + S_2 = kN_1 \ln(V) + kN_2 \ln(V) + \dots$

nachher: $S_{ges} = kN_1 \ln(2V) + kN_2 \ln(2V) + \dots$

$\Rightarrow \Delta S = kN_1 \ln(2V) + kN_2 \ln(2V) - kN_1 \ln(V) - kN_2 \ln(V) + \dots$

$= k \ln(2) (N_1 + N_2)$ (gleich wie andere Lösung, weil Ununterscheidbarkeit bei versch. Gasen keine Rolle spielt) ✓

b) gleiche ideale Gase (Annahme: $N_1 = N_2 = N$) ✓

o mit Ununterscheidbarkeit:

vorher: $S_{ges} = kN \ln\left(\frac{V}{N}\right) + kN \ln\left(\frac{V}{N}\right)$

$= kN \ln\left(\left(\frac{V}{N}\right)^2\right) = kN \ln\left(\frac{V}{N}\right)$

nachher: $S_{ges} = k \ln\left(\frac{2V}{2N}\right)$ ✓

$\Rightarrow \Delta S = k\left(2N \ln\left(\frac{2V}{2N}\right) - 2N \ln\left(\frac{V}{N}\right)\right) = 0$ ✓

o klassisch:

vorher: $S_{ges} = 2kN \ln(V)$

nachher: $S_{ges} = 2kN \ln(2V)$

$\Rightarrow \Delta S = 2kN (\ln(2V) - \ln(V)) = 2kN \ln(2)$ ✓ (unterschiedliches Ergebnis, weil klassische Entropie Ununterscheidbarkeit des Teilchen nicht berücksichtigt \rightarrow Gibbs'sches Paradoxon) ✓ **2(414)**

② a) kanonische Zustandssumme $Z_N \propto \int d^3p d^3x \frac{1}{N!} e^{-\beta H(x,p)}$

Es handelt sich um ein System von N identischen, nicht-wechselwirkenden Teilchen, daher ist $H(x,p) = \sum_i H_0(x_i, p_i)$ ✓

$$\rightarrow Z_N = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^3x d^3p e^{-\beta H(x,p)} = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^3x d^3p e^{-\beta \sum_i H_0(x_i, p_i)} \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{N! h^{3N}} \prod_i \int d^3x d^3p e^{-\beta H_0(x_i, p_i)}$$

$$= \frac{1}{N!} \left(\frac{1}{h^3} \int d^3x d^3p e^{-\beta H_0(x,p)} \right)^N = \frac{1}{N!} z_1^N \quad \checkmark$$

mit $z_1 \hat{=}$ Zustandssumme eines einzelnen Teilchens

$$z_1 = \frac{1}{h^3} \int d^3x d^3p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \rightarrow \text{Integration über } \text{Vol}^3 x \text{ liefert Volumen } V \quad \checkmark$$

$$= \frac{V}{h^3} \int d^3p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} = \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} \quad \text{aus Theo D: } \int dx x^2 e^{-ax^2} = -\frac{d}{da} \int dx e^{-ax^2} \text{ mit } a = \frac{\beta}{2m}$$

$$= -\frac{4\pi V}{h^3} \frac{d}{da} \int_0^\infty dp e^{-ap^2} = -\frac{4\pi V}{h^3} \frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{2\pi V}{h^3} \sqrt{\frac{\pi 2^3 m^3}{\beta^3}} = V \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}^3 \quad \checkmark$$

$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (Combit)

mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$ und h Planck-Konstante ist $\lambda_{th} = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}$ die thermische De-Broglie-Wellenlänge ✓

$$\rightarrow z_1 = \frac{V}{\lambda_{th}^3} \rightarrow Z_N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_{th}^3} \right)^N \left(= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2}} \right)^N \right)$$

Sterling-Reihe $\ln(N!) = \sum_{i=1}^N \ln(i)$ nach der Euler-Maclaurin'schen Summenformel: $\ln(N!) = N \ln(N) - N + \mathcal{O}(\ln(N))$:
(Wikipedia:)

$$\bullet F = -k_B T \ln(Z_N) = -k_B T \ln\left(\frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_{th}^3}\right)^N\right) = -k_B T [-\ln(N!) + N \ln\left(\frac{V}{\lambda_{th}^3}\right)]$$

$$\approx -k_B T [-N \ln(N) + N + N \ln\left(\frac{V}{\lambda_{th}^3}\right)] = -k_B T N \left[1 + \ln\left(\frac{V}{N \lambda_{th}^3}\right) \right] \quad \checkmark$$

$$\bullet S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \approx -k_B N - k_B N \ln\left(\frac{V}{N \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right)^{3/2}}\right) - k_B T N \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{T}$$

$$= k_B N \left(1 + \ln\left(\frac{V}{N \lambda_{th}^3}\right) + \frac{3}{2} \right) = k_B N \left(\frac{5}{2} + \ln\left(\frac{V}{N \lambda_{th}^3}\right) \right) \quad \checkmark$$

$$\bullet p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \approx -\frac{k_B T N}{V} \quad \checkmark$$

h -Abhängigkeit

NR:

$$\partial_T \ln\left(\frac{V}{N \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right)^{3/2}}\right)$$

$$= \partial_T \left[\ln\left(\frac{V}{N \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B}\right)^{3/2}}\right) + \ln\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right) \right]$$

$$= \partial_T \left[\ln\left(\frac{V}{N \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B}\right)^{3/2}}\right) + \frac{3}{2} \ln(T) \right]$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{T}$$

Restskalierung $h \rightarrow \text{ach?}$

b) $Z_N = \text{Tr} (e^{-\beta H}) = \sum_n \langle \Phi_n | e^{-\beta E_n} | \Phi_n \rangle$

Wellenfunktion im Ortsraum $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \Phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\theta \in S_N} (\pm 1)^\theta \phi_{\vec{p}_1}(\vec{x}_{\theta_1}) \dots \phi_{\vec{p}_N}(\vec{x}_{\theta_N})$, $\phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}}$

Hinweis: $\sum_n \rightarrow \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \int d^3p$ (thermodyn. Limes) Menge der mögl. Permutationen

Bosonen \downarrow
 Fermionen \uparrow

QM: N Teilchen in einer Box mit Kantenlängen L ($\rightarrow V=L^3$)

$\rightarrow H|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle$ mit $E_n = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$ und $p_i = \frac{2\pi\hbar}{L}$

$\Rightarrow Z_N = \sum_n \langle \Phi_n | e^{-\beta E_n} | \Phi_n \rangle \rightarrow \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \int d^3p \langle \Phi_n | e^{-\beta E_n} | \Phi_n \rangle$

$= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \int d^3p \int d^3x \langle \Phi_n | \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N \rangle \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \Phi_n \rangle e^{-\beta E_n}$ ✓

(Vollständigkeit)

$= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \int d^3p \int d^3x \left(\frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\theta \in S_N} (\pm 1)^\theta \prod_{i=1}^N \phi_{\vec{p}_i}^*(\vec{x}_{\theta_i}) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\theta' \in S_N} (\pm 1)^{\theta'} \prod_{i=1}^N \phi_{\vec{p}_{\theta'_i}}(\vec{x}_{\theta'_i}) \right) e^{-\beta E_n}$

$= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \int d^3p \int d^3x \sum_{\theta, \theta'} \frac{(\pm 1)^{\theta+\theta'}}{N! V^N} \prod_{i=1}^N e^{i\vec{p}_i \cdot (\vec{x}_{\theta_i} - \vec{x}_{\theta'_i})/\hbar} e^{-\beta E_n}$

$= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \int d^3p \int d^3x \sum_{\theta, \theta'} \frac{(\pm 1)^{\theta+\theta'}}{N! V^N} e^{\sum_{i=1}^N i\vec{p}_i \cdot (\vec{x}_{\theta_i} - \vec{x}_{\theta'_i})/\hbar} e^{-\beta E_n}$ ✓ (1.5/3)

... ?

(4/6)

(8/10)

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 12

Abgabe: 06.02.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 10.02.2026

Aufgabe 1: Entropie eines Spinsystems

Betrachten Sie ein System von N Spin-1/2-Teilchen ohne Wechselwirkung untereinander. Berechnen Sie die Entropie im kanonischen Ensemble mit Hilfe der Formel $S_{kan} = -k \sum_i w_i \ln w_i$ und vergleichen Sie mit $S = -(\partial F / \partial T)_B$ (vgl. Vorlesung).

Solution

For each spin-1/2 particle, we have the partition function

$$z_i = \sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{\beta E_i \sigma_i} = e^{\beta E_i} + e^{-\beta E_i} = 2 \cosh(\beta E_i),$$

with E_i being the energy of a two-level system. Let us assume all $E_i = E$, then the partition function for the whole system is

$$Z = \prod_i z_i = \prod_i 2 \cosh(\beta E_i) = [2 \cosh(\beta E)]^N,$$

and

$$w_i^{\pm} = \frac{e^{\pm \beta E_i}}{z_i} = \frac{e^{\pm \beta E}}{2 \cosh(\beta E)},$$

$$S_{kan} = -k \sum_i w_i \log(w_i) = k (N \log [2 \cosh(\beta E)] - \beta EN \tanh(\beta E)).$$

On the other hand, we have the free energy

$$F = -kT \log Z = -NT \log [2 \cosh(\beta E)]$$

and entropy

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k (N \log [2 \cosh(\beta E)] - \beta EN \tanh(\beta E)).$$

Aufgabe 2: System von Oszillatoren ($2 + 2 = 4$)

Wir betrachten ein System von N quantenmechanischen Oszillatoren, mit Frequenzen ω_i ($i = 1, \dots, N$). Die Energieniveaus eines Oszillators sind gegeben durch $(n + 1/2)\hbar\omega_i$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

a) Berechnen Sie die Zustandssumme für dieses System im kanonischen Ensemble.

Solution

We start with

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \right] = \prod_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta H_i} | n \rangle = \prod_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_i} \\ &= \prod_{i=1}^N e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta\hbar\omega_i} \right)^n = \prod_{i=1}^N e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_i} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_i}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^N \left[2 \sinh \left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2} \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die freie Energie, die mittlere Energie und die spezifische Wärmekapazität.

Solution

The free energy is

$$F = -\frac{1}{\beta} \log(Z) = \sum_{i=1}^N kT \log \left[2 \sinh \left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2} \right) \right],$$

and the average energy

$$U = -\frac{\partial \log(Z)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar\omega_i}{2} \coth \left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2} \right),$$

and the specific heat capacity

$$c_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{\hbar\omega_i}{2T} \right)^2 \left[\sinh \left(\frac{\hbar\omega_i}{2kT} \right) \right]^{-2}.$$

Aufgabe 3: Magnetisches Moment für allgemeinen Spin (2 + 2 + 1 + 1 = 6)

Betrachten Sie ein System von N Teilchen mit einem allgemeinen Drehimpuls \vec{J} mit der Quantenzahl J ohne Wechselwirkung in einem homogenen äußeren Magnetfeld entlang der z-Achse. Der Einteilchenhamiltonoperator ist gegeben durch

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad \text{mit} \quad \vec{\mu} = -g\mu_B \vec{J} / \hbar.$$

a) Bestimmen Sie die kanonische 1-Teilchen-Zustandssumme Z_1 .

Solution

We calculate the partition function as

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{m=-J}^J e^{-\beta E_m} = \sum_{m=-j}^J e^{-\beta E_0 m} \\ &= e^{\beta E_0 J} \sum_{m=0}^{2J} e^{-\beta E_0 m} = e^{\beta E_0 J} \frac{1 - e^{-\beta E_0 (2J+1)}}{1 - e^{-\beta E_0}} \\ &= \frac{e^{\frac{\beta E_0 (2J+1)}{2}} - e^{-\frac{\beta E_0 (2J+1)}{2}}}{e^{\beta E_0/2} - e^{-\beta E_0/2}} = \frac{\sinh(\beta E_0 (J + \frac{1}{2}))}{\sinh(\beta E_0/2)}, \end{aligned}$$

with $E_0 = g\mu_B B$.

b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \mu_z \rangle$ von einem Teilchen geschrieben werden kann als

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z_1}{\partial B},$$

und berechnen Sie damit den Erwartungswert.

Solution

We consider first

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log Z_1}{\partial B} &= \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial B} = \frac{1}{Z_1} \sum_{m=-J}^J \frac{\partial}{\partial B} e^{-\beta E_0 m} \\ &= \beta \left(\frac{1}{Z_1} \sum_{m=-J}^J (-g\mu_B m) e^{-\beta E_0 m} \right) = \beta \langle \mu_z \rangle, \end{aligned}$$

from which the relation directly follows. Next we calculate the expectation value

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z_1}{\partial B} = g\mu_B \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) \coth \left(\beta E_0 \left(J + \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \coth \left(\frac{\beta E_0}{2} \right) \right).$$

c) Betrachten Sie den Grenzfall für kleine Felder \vec{B} , bzw. große Temperaturen und zeigen Sie, dass man für die magnetische Suszeptibilität χ wieder das Curie-Gesetz erhält, also $\chi \sim 1/T$.

Solution

We expand first the expectation value for small B

$$\begin{aligned}\langle \mu_z \rangle &= g\mu_B \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\beta E_0 \left(J + \frac{1}{2} \right)} + \frac{\beta E_0}{3} \left(J + \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\beta E_0} + \frac{\beta E_0}{6} \right) \right) \\ &= \frac{g\mu_B \beta E_0}{3} J(J+1).\end{aligned}$$

Now we calculate χ as

$$\chi = \frac{\partial \langle \mu_z \rangle}{\partial B} = (g\mu_B)^2 \frac{\beta}{3} J(J+1) \sim \frac{1}{T},$$

which follows Curie's Law.

- d) Bestimmen Sie $\langle \mu_z \rangle$ und χ im gemeinsamen Grenzfall $J \rightarrow \infty$ und $g \rightarrow 0$, wobei $g \cdot J$ konstant sein soll.

Solution

In the combined limit we obtain for $\langle \mu_z \rangle$

$$\langle \mu_z \rangle = g\mu_B J \left(\coth(\beta E_0 J) - \frac{1}{\beta E_0 J} \right),$$

where we used

$$\begin{aligned}g(J + 1/2) &= gJ(1 + \mathcal{O}(g)) \\ \coth(\beta E_0/2) &= \frac{2}{\beta E_0} + \frac{\beta E_0}{6} + \mathcal{O}(g^2).\end{aligned}$$

And for χ we obtain

$$\chi = (g\mu_B J)^2 \beta \left(\frac{1}{\beta E_0 J} - \frac{1}{\sinh^2(\beta E_0 J)} \right) \stackrel{B \rightarrow 0}{=} \frac{(g\mu_B J)^2 \beta}{3}$$

2) N quantenmech. Osz. mit ω_i ($i=1, \dots, N$)

$$E_n = \hbar\omega_i \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ mit Eigenzuständen } |n\rangle$$

Zustandssumme des kanonischen Ensembles

$$a) Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta \sum_{i=1}^N \hbar\omega_i} | n \rangle = \prod_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar\omega_i n} = \prod_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar\omega_i (n + \frac{1}{2})} = \prod_{i=1}^N e^{-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_i} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta \hbar\omega_i})^n \quad \checkmark$$

$$= \prod_{i=1}^N \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_i}}{1 - e^{-\beta \hbar\omega_i}} \quad \text{mit der geometrischen Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (x = e^{-\beta \hbar\omega_i})$$

$$= \prod_{i=1}^N \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_i} (1 - e^{-\beta \hbar\omega_i})} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_i} - e^{-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_i}} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega_i}{2kT}\right)} \quad \text{mit } \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ und } \beta = \frac{1}{kT} \quad \checkmark$$

$$b) \text{ Freie Energie } F = U - TS = -\frac{1}{\beta} \ln(Z) = -\frac{1}{\beta} \ln\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega_i}{2kT}\right)}\right) = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega_i}{2kT}\right)}\right) \quad \checkmark$$

$$\text{mittlere Energie } \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega_i}{2kT}\right)} \frac{\hbar\omega_i}{kT} \cosh\left(\frac{\hbar\omega_i}{2kT}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar\omega_i}{2kT} \coth\left(\frac{\hbar\omega_i}{2kT}\right) \quad \checkmark$$

$$\text{spez. Wärmekapazität } c_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = ?$$

$\Sigma(3.5/4)$

$$3) \hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \text{mit } \vec{\mu} = -g \mu_B \frac{\vec{J}}{\hbar} \quad \text{und } \vec{B} = B \hat{e}_z$$

$$\rightarrow \hat{H} = -\frac{g \mu_B B}{\hbar} J_z$$

Die Eigenwerte von J_z sind mit $m = -J, \dots, J$

$$\rightarrow E_m = g \mu_B B m \quad \checkmark$$

$$a) Z_1 = \sum_{m=-J}^J e^{-\beta E_m} = \sum_{m=-J}^J e^{-\beta g \mu_B B m} = \sum_{m=-J}^J e^{-cm} \quad \text{mit } c := \beta g \mu_B B \quad \checkmark$$

endliche geom. Reihe: $\sum_{k=a}^{b-1} r^k = \frac{r^b - r^a}{r - 1}$ mit $r := e^{-c}$, $a = -J$, $b-1 = J \rightarrow J+1 = b$

$$= \frac{(e^{-c(J+1)} - e^c) e^{c/2}}{(e^{-c} - 1) e^{c/2}} = \frac{e^{-c(J+\frac{1}{2})} - e^{c(J+\frac{1}{2})}}{e^{-c/2} - e^{c/2}} = \frac{\sinh(c(J+\frac{1}{2}))}{\sinh(\frac{c}{2})} = \frac{\sinh(\beta g \mu_B B (J+\frac{1}{2}))}{\sinh(\beta g \mu_B B \frac{1}{2})} \quad \checkmark$$

$$b) \text{ z.z.: } \langle \mu_x \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z_1)}{\partial B}$$

$$\mu_x = -\frac{g \mu_B}{\hbar} J_x \rightarrow (\mu_x)_m = -g \mu_B m$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z_1)}{\partial B} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln\left(\sum_{m=-J}^J e^{-\beta \epsilon_m}\right) = \frac{1}{\beta} \sum_{m=-J}^J \left(-\frac{\partial \epsilon_m}{\partial B}\right) e^{-\beta \epsilon_m} = \frac{1}{\beta} \sum_{m=-J}^J (-g \mu_B m) e^{-\beta \epsilon_m} = \langle -g \mu_B m \rangle = \langle M_z \rangle$$

$$= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \left[\ln\left(\sinh\left(\beta g \mu_B B \left(J + \frac{1}{2}\right)\right)\right) - \ln\left(\sinh\left(\beta g \mu_B B \frac{1}{2}\right)\right) \right]$$

$$= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\cosh\left(\beta g \mu_B B \left(J + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh\left(\beta g \mu_B B \left(J + \frac{1}{2}\right)\right)} \cdot \beta g \mu_B \left(J + \frac{1}{2}\right) - \frac{\cosh\left(\beta g \mu_B B \frac{1}{2}\right)}{\sinh\left(\beta g \mu_B B \frac{1}{2}\right)} \beta g \mu_B \frac{1}{2} \right]$$

$$= g \mu_B \left[\left(J + \frac{1}{2}\right) \coth\left(\beta g \mu_B B \left(J + \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{2} \coth\left(\beta g \mu_B B \frac{1}{2}\right) \right]$$

c) $B \ll 1$ bzw. $T \gg 1 \rightarrow \beta \ll 1$:

$$\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\rightarrow \langle M_z \rangle \approx g \mu_B \left[\left(J + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\beta g \mu_B B \left(J + \frac{1}{2}\right)} + \frac{\beta g \mu_B B \left(J + \frac{1}{2}\right)}{3} \right) \right]$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\beta g \mu_B B} + \frac{\beta g \mu_B B}{6} \right)]$$

$$= \frac{1}{3} (g \mu_B)^2 \beta B \left(J^2 + J + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{12} \beta B (g \mu_B)^2$$

$$= \frac{(g \mu_B)^2 \beta B J(J+1)}{3}$$

$$\rightarrow \chi = \frac{\partial \langle M_z \rangle}{\partial B} = \frac{(g \mu_B)^2 J(J+1)}{3 k T} \propto \frac{1}{T}$$

$\Sigma(8.5/10)$

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer

WS 25/26 – Blatt 13

Abgabe: 13.02.2026, 11:30 Uhr; Besprechung: 17.02.2026

Aufgabe 1: Ideales Bose Gas in zwei Dimensionen

- a) Geben Sie die großkanonische Zustandssumme $Z_G(T, V, \mu)$ für ein zweidimensionales Bose Gas an.

solution

The grand canonical partition function is given by

$$Z_G = \sum_{N,n} e^{-\beta(E_n - \mu N)} = \sum_{n_\lambda} e^{-\beta \sum_\lambda n_\lambda (\epsilon_\lambda - \mu)} = \prod_\lambda \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}},$$

where the energy of the two-dimensional Bose gas is

$$\epsilon_\lambda = \frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2).$$

- b) Bestimmen Sie die mittlere Anzahl der Teilchen pro Flächeneinheit als Funktion von μ und T . Hierbei können Sie für die Energie der einzelnen Bosonen

$$\epsilon_\lambda = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2)$$

verwenden.

solution

We calculate first the grand canonical potential

$$\Omega = -kT \log Z_G = kT \sum_{\lambda} \log \left[1 - e^{-\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu)} \right].$$

The average number of particles reads then

$$\langle N \rangle = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \Big|_{T,V} = \sum_{\lambda} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu)} - 1} = \sum_{\lambda} \langle n_{\lambda} \rangle = \sum_{\lambda} n_B(\epsilon_{\lambda})$$

We can write the sum over λ as

$$\sum_{\lambda} = \sum_{n_x, n_y} = \int dn_x dn_y = 2\pi \int_0^{\infty} dn n = 2\pi \int_0^{\infty} dp p \frac{L^2}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Finally we obtain for the average number of particle per volume

$$\frac{\langle N \rangle}{L^2} = \frac{1}{2\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} dp p \frac{1}{e^{\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)} - 1} = - \frac{mkT}{2\pi\hbar} \log \left[1 - e^{\beta\mu} \right].$$

Note: in the lecture the notation “ N ” and not “ $\langle N \rangle$ ” is used.

c) Zeigen Sie, dass in diesem Beispiel keine Bose-Einstein-Kondensation auftritt.

solution

In order to find whether we have Bose-Einstein condensation or not, we have to check if the expression

$$\int_0^{\infty} d\epsilon \nu(\epsilon) n_B(\epsilon, \mu = 0) = \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\nu(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1},$$

i.e.

$$\int_0^{\infty} dp p \nu(\epsilon(p)) n_B(\epsilon(p), \mu = 0) = \int_0^{\infty} dp p \frac{\nu(\epsilon(p))}{e^{\beta\frac{p^2}{2m}} - 1},$$

diverges (no BEK) or converges (BEK). For the state density we have $\nu(\epsilon) \propto \epsilon^{1/2} \propto p$ in three dimensions, $\nu(\epsilon) \propto \epsilon^0 \propto p^0$ in two dimensions and $\nu(\epsilon) \propto \epsilon^{-1/2} \propto p^{-1}$ in one dimension. For three dimensions the integral is convergent, but for two or one it is divergent.

Aufgabe 2: (*) N anharmonische Oszillatoren (5 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der klassischen Statistik die mittlere Energie und den Beitrag zur spezifischen Wärme im Grenzfall kleiner Temperaturen für ein System von N unabhängigen anharmonischen Oszillatoren mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} + \gamma \vec{r}^4, \quad \gamma > 0,$$

wobei der letzte Term als kleine Störung aufgefasst werden kann.

Solution

For the partition function, we have

$$\begin{aligned}
Z_N &= \left(\int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \gamma r^4 \right)} \right)^N \\
&= \left(\frac{1}{\lambda^3} \int d^3\vec{r} e^{-\beta \left(\frac{m\omega^2 r^2}{2} + \gamma r^4 \right)} \right)^N \\
&= Z_0 \left(1 - \frac{\beta}{Z_0^{(1)} \lambda^3} \int d^3\vec{r} e^{-\beta \left(\frac{m\omega^2 r^2}{2} \right)} \gamma r^4 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right)^N = Z_0 \left(1 + \gamma \frac{Z_1^{(1)}}{Z_0^{(1)}} + \mathcal{O}(\gamma^2) \right)^N
\end{aligned}$$

with $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m}}$. In the last line we have already expanded the integrand and introduced Z_0 which is the partition function with $\gamma = 0$ and the superscript (1) denotes terms that are associated to single particle quantities. Now we proceed to calculate the partition function in the $\gamma = 0$ case

$$Z_0 = \left(\frac{1}{\lambda^3} \int d^3\vec{r} e^{-\beta \left(\frac{m\omega^2 r^2}{2} \right)} \right)^N = \left(\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m \omega^2}} \right)^{3N} = \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^{3N} = \left(Z_0^{(1)} \right)^N.$$

The next expansion term is given by

$$\begin{aligned}
\frac{Z_1^{(1)}}{Z_0^{(1)}} &= -\frac{\beta}{Z_0^{(1)} \lambda^3} \int d^3\vec{r} e^{-\beta \left(\frac{m\omega^2 r^2}{2} \right)} r^4 = -\frac{4\pi\beta}{Z_0^{(1)} \lambda^3} \int_0^\infty dr e^{-\beta \left(\frac{m\omega^2 r^2}{2} \right)} r^4 \\
&= -\frac{4\pi\beta}{Z_0^{(1)} \lambda^3} \left(15 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{kT}{m\omega^2} \right)^{\frac{7}{2}} \right) = -15\beta \left(\frac{kT}{m\omega^2} \right)^2
\end{aligned}$$

Then the corresponding thermodynamic quantities F_0, E_0, C_0 can be calculated by the standard formulas. We obtain

$$\begin{aligned}
F_0 &= -kT \log Z_0 = -3NkT \log(kT/(\hbar\omega)) \\
E_0 &= F - T \frac{\partial F}{\partial T} = 3kTN \\
C_0 &= -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = 3kN
\end{aligned}$$

In the next step, we include the γ -induced part by perturbation

$$\begin{aligned}
F &= -kT \log Z_N = -kT \log \left(Z_0 \left(1 + \gamma \frac{Z_1^{(1)}}{Z_0^{(1)}} + \dots \right)^N \right) = -kT \log Z_0 - NkT\gamma \frac{Z_1^{(1)}}{Z_0^{(1)}} \\
&= -kT \log Z_0 + 15N\gamma \left(\frac{kT}{m\omega^2} \right)^2
\end{aligned}$$

We can derive corresponding E_1 and C_1 . The final results can be assembled by $E = E_0 + E_1$ and $C = C_0 + C_1$. We find

$$E_1 = -15N\gamma \left(\frac{kT}{m\omega^2} \right)^2, \quad C_1 = -30N\gamma \left(\frac{k}{m\omega^2} \right)^2 T$$

Aufgabe 3: (*) Kanonische Verteilung für magnetische Spins (5 Punkte)

Ein magnetisches System habe Energieaustausch mit einem Wärmebad. Zusätzlich sei seine Magnetisierung an das Wärmebad gekoppelt, so dass die Mittelwerte von Energie, $\langle E \rangle$, und Magnetisierung, $\langle M \rangle$, des Systems vorgegeben sind. Es soll ein Ensemble mit N solchen Systemen betrachtet werden. E_r und M_s seien die mögliche Gesamtenergie bzw. Magnetisierung der einzelnen Systeme und $n_{r,s}$ ist die Zahl der Systeme in dem Ensemble, die Energie E_r und Magnetisierung M_s haben.

- a) Geben Sie die drei Zwangsbedingungen an, die man zum Aufstellen der verallgemeinerten Entropie benötigt.

Solution

We denote $w(n) = \frac{n_{r,s}}{N}$ and the simplified summation notation $\sum_n := \sum_{r,s}$

$$\sum_n w(n) = 1$$

$$\sum_n E_r w(n) = \langle E \rangle$$

$$\sum_n M_s w(n) = \langle M \rangle$$

- b) Zeigen Sie, dass die Besetzungswahrscheinlichkeit $n_{r,s}/N$ gegeben ist durch

$$\frac{n_{r,s}}{N} = C e^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)}.$$

Benutzen Sie hierfür die Methode der Lagrangemultiplikatoren um die Zwangsbedingungen aus der ersten Teilaufgabe einzubinden. Im zu zeigenden Ergebnis sind γ und δ zwei der damit eingeführten Lagrangemultiplikatoren. Geben Sie die Konstante C an.

Solution

Use the Lagrangian multiplier methods, we have

$$\begin{aligned}\bar{S} = & -k \sum_n w(n) \log(w(n)) + \alpha \left(\sum_n w(n) - 1 \right) + \gamma \left(\sum_n E_r w(n) - \langle E \rangle \right) \\ & + \delta \left(\sum_n M_s w(n) - \langle M \rangle \right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{S}}{\partial w(n)} = & -k \log(w(n)) - k + \alpha + \gamma E_n + \delta M_s = 0, \\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial \alpha} = & \sum_n w(n) - 1 = 0, \\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial \gamma} = & \sum_n E_r w(n) - \langle E \rangle = 0, \\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial \delta} = & \sum_n M_s w(n) - \langle M \rangle = 0.\end{aligned}$$

These lead to

$$\begin{aligned}\log(w(n)) = & -1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{\gamma}{k} E_r + \frac{\delta}{k} M_s, \\ w(n) = & e^{-1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{\gamma}{k} E_r + \frac{\delta}{k} M_s},\end{aligned}$$

and we have $C = e^{-1 + \frac{\alpha}{k}}$.

We can also have

$$\begin{aligned}w(n) := & \frac{1}{Z_k} e^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)}, \\ Z_k := & \sum_n e^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)}\end{aligned}$$

with $\sum_n w(n) = 1$ and $C = 1/Z_k$.

- c) $\Omega(E, M)$ sei der mikrokanonische Entartungsgrad. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(E, M)$, das System in einem Zustand der Energie E und der Magnetisierung M zu finden?

Solution

$$P(E, M) = \Omega(E, M) w(n)$$

- d) Geben Sie die Bedingungsgleichungen für die wahrscheinlichste Energie (\bar{E}) bzw. Magnetisierung (\bar{M}) ($P(E, M)$ maximal!) an. Bestimmen Sie das Differential der inneren Energie $dE = d\langle E \rangle = d\bar{E}$ für ein System mit Magnetisierung. Nutzen Sie nun die Beziehung zwischen der Entropie S und $\Omega(E, M)$ aus, um Ω zu eliminieren und so die Lagrange-Parameter γ und δ zu bestimmen.

Solution

Use

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial E} &= C e^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial E} + \Omega(E, M) \frac{\gamma}{k} \right) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial M} &= C e^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} + \Omega(E, M) \frac{\delta}{k} \right) = 0,\end{aligned}$$

and we obtain

$$\frac{\gamma}{k} = -\frac{\partial \Omega}{\partial E} / \Omega, \quad \frac{\delta}{k} = -\frac{\partial \Omega}{\partial M} / \Omega.$$

We then have

$$\begin{aligned}S &= k \log \Omega(E, M), \\ \frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{k}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial E}, \\ \frac{\partial S}{\partial M} &= \frac{k}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial M},\end{aligned}$$

which amount to

$$\gamma = -\frac{\partial S}{\partial E}, \quad \delta = -\frac{\partial S}{\partial M}$$

We then use

$$dU = T dS + H dM \Rightarrow dS = \frac{1}{T} dU - \frac{H}{T} dM,$$

we obtain $\gamma = -\frac{1}{T}$ and $\delta = \frac{H}{T}$ and

$$\begin{aligned}w(n) &:= \frac{1}{Z_k} e^{-\frac{E_r}{kT} + \frac{HM_s}{kT}}, \\ Z_k &:= \sum_n e^{-\frac{E_r}{kT} + \frac{HM_s}{kT}}\end{aligned}$$

- e) Wie hängt in diesem Fall die freie Energie $F = E - TS - HM$ mit der kanonische Zustandssumme Z_K zusammen?

Solution

We use

$$\begin{aligned} F &= E - TS - HM = \sum_n E_r w(n) + Tk \sum_n w(n) \log(w(n)) - H \sum_n M_s w(n) \\ &= \sum_n \left[E_r w(n) + kT w(n) \left(-\log(Z_k) - \frac{E_r}{kT} + \frac{HM_s}{kT} \right) - HM_s w(n) \right] \\ &= -kT \log(Z_k), \end{aligned}$$

and we obtain

$$Z_k = e^{-\frac{F}{kT}}.$$

② $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} + \underbrace{\gamma \vec{r}^4}_{\text{Störung}} \quad \gamma > 0$

$Z_N = \left(\frac{1}{h^3} \int d^3x d^3p e^{-\beta H} \right)^N = \left(\frac{1}{h^3} \int d^3x d^3p e^{-\beta \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} + \gamma \vec{r}^4 \right)} \right)^N$

$\stackrel{\text{Stat. M.}}{=} \left(\frac{1}{\lambda^3} \int d^3r e^{-\beta \left(\frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} + \gamma \vec{r}^4 \right)} \right)^N \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m kT}} \quad \checkmark$

Ungestörter Term ($\gamma=0$):

$Z_0 = \left(\frac{1}{\lambda^3} \int d^3r e^{-\beta \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2}} \right)^N = \left(\frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-\beta \frac{m\omega^2 r^2}{2}} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \right)^N$

$= \left(\frac{4\pi}{\lambda^3} \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-\beta \frac{m\omega^2 r^2}{2}} \right)^N$

$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
 $a = \frac{\beta m \omega^2}{2}$

$= \left(\frac{4\pi}{\lambda^3} \frac{2}{\sqrt{\beta m \omega^2}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m \omega^2}} \right)^N = \left(\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m \omega^2}} \right)^{3N} \quad \checkmark$

$= \left(\sqrt{\frac{2\pi kT}{h^2} \frac{2\pi kT}{m \omega^2}} \right)^{3N} = \left(\sqrt{\frac{4\pi^2 k^2 T^2}{h^2 \omega^2}} \right)^{3N} = \left(\frac{kT}{h\omega} \right)^{3N} \quad \checkmark$

$\rightarrow F_0 = -\frac{1}{\beta} \ln(Z_0) = -kT 3N \ln\left(\frac{kT}{h\omega}\right) \quad \checkmark$

$\rightarrow U_0 = F_0 - T \frac{\partial F_0}{\partial T} = -3NkT \ln\left(\frac{kT}{h\omega}\right) - T \left(-3Nk \ln\left(\frac{kT}{h\omega}\right) - 3Nk \right) = 3NkT \quad \checkmark$

$\rightarrow C_0 = \frac{\partial U_0}{\partial T} = 3Nk \quad \checkmark$

$F < U - TS$
 $\rightarrow U = F + TS = F - T \frac{\partial F}{\partial T}$

γ klein: $e^{-\beta \gamma \vec{r}^4} = 1 - \beta \gamma \vec{r}^4 + \mathcal{O}(\gamma^2) \quad \checkmark$

\rightarrow mit Störung ist $F_1 = N F_1^{(1)} = N \text{Tr} \left(\frac{1}{Z_0^{(1)}} e^{-\beta H_0} \gamma \vec{r}^4 \right)$ (Für ein Teilchen!)

$= \frac{N}{h^3} \int d^3p d^3x \frac{1}{Z_0^{(1)}} e^{-\beta H_0} \gamma \vec{r}^4$

$= \frac{N\gamma}{h^3} \left(\frac{h\omega}{kT} \right)^3 \int d^3p e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \int d^3x e^{-\frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2kT}} \vec{r}^4$

$= \frac{N\gamma}{\lambda^3} \left(\frac{h\omega}{kT} \right)^3 4\pi \int_0^{\infty} dr e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} r^6$

von Wikipedia:

$\int_0^{\infty} dx e^{-bx^2} x^{2n} = \frac{(2n-1)!!}{b^n 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$

mit $n=3$ und $b = \frac{m\omega^2}{2kT}$

$$= \frac{N\gamma}{\lambda^2} \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3 4\pi \frac{\sqrt{5\pi}}{\left(\frac{\hbar\omega^2}{2kT}\right)^3 \cdot 16} \sqrt{\frac{\pi 2kT}{m\omega^2}}$$

$$= N\gamma \left(\frac{\hbar\omega}{kT\lambda}\right)^3 \frac{15\pi}{4} \sqrt{\frac{128 k^2 T^2 \pi}{m^2 \omega^{14}}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m k T}}$$

$$= 30\sqrt{2\pi} N\gamma \left(\frac{\hbar\omega}{kT\lambda}\right)^3 \left(\frac{kT}{m\omega^2}\right)^{\frac{7}{2}} \cdot \pi$$

$$\left(= 30\sqrt{2\pi} N\gamma \left(\frac{\hbar\omega \sqrt{m k T}}{kT \sqrt{2\pi} \hbar}\right)^3 \left(\frac{kT}{m\omega^2}\right)^{\frac{7}{2}} \cdot \pi \right.$$

$$\left. = 30\sqrt{2\pi} N\gamma \left(\omega \sqrt{\frac{m}{2\pi k}}\right)^3 T^2 \left(\frac{k}{m\omega^2}\right)^{\frac{7}{2}} \right) \cdot \pi$$

$$\rightarrow U_1 = F_1 - T \frac{\partial F_1}{\partial T} = 30\sqrt{2\pi} N\gamma \left(\omega \sqrt{\frac{m}{2\pi k}}\right)^3 \left(\frac{k}{m\omega^2}\right)^{\frac{7}{2}} \left[T^2 - T \cdot 2T \right] \cdot \pi$$

$$= -30\sqrt{2\pi} N\gamma \left(\omega \sqrt{\frac{m}{2\pi k}}\right)^3 \left(\frac{k}{m\omega^2}\right)^{\frac{7}{2}} T^2 \quad ?$$

$$= -15 N\gamma \left(\frac{kT}{m\omega^2}\right)^2 \quad (v)$$

Σ(415)

③ a) (1) $\sum_n w_n = 1$ mit $w_n = \frac{n_{r,s}}{N}$

(2) $\langle E \rangle = \sum_n E_n w_n$

(3) $\langle M \rangle = \sum_n M_s w_n$ ✓

b) z.B.: $\frac{\langle n_{r,s} \rangle}{N} = C e^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)}$

$$\tilde{S} = -k \sum_n w_n \ln(w_n) - \lambda \overbrace{\left(\sum_n w_n - 1\right)}^{(1)} - \gamma \overbrace{\left(\sum_n E_r w_n - \langle E \rangle\right)}^{(2)} - \delta \overbrace{\left(\sum_n M_s w_n - \langle M \rangle\right)}^{(3)}$$
 ✓

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial w_n} = -k \ln(w_n) - k w_n \frac{1}{w_n} - \lambda - \gamma E_r - \delta M_s \stackrel{!}{=} 0 & \checkmark \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \lambda} = -\sum_n w_n + 1 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \gamma} = -\sum_n E_r w_n + \langle E \rangle = 0 \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \delta} = -\sum_n M_s w_n + \langle M \rangle = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ln(w_n) + 1 + \frac{\lambda}{k} + \frac{\gamma}{k} E_r + \frac{\delta}{k} M_s = 0$

$\Leftrightarrow \ln(w_n) = -1 - \frac{\lambda}{k} - \frac{\gamma}{k} E_r - \frac{\delta}{k} M_s$

$\Leftrightarrow w_n = \frac{n_{r,s}}{N} = e^{-1 - \frac{\lambda}{k} - \frac{\gamma}{k} E_r - \frac{\delta}{k} M_s} = \frac{1}{e^{1 + \frac{\lambda}{k}}} e^{\frac{1}{k}(-\gamma E_r - \delta M_s)}$ ✓

$= C e^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)}$ // mit $C = \frac{1}{e^{1 + \frac{\lambda}{k}}}$ und $-\gamma \rightarrow \gamma, -\delta \rightarrow \delta$ ✓

c) $\Omega(E, M) \hat{=}$ mikrokanonischer Entartungsgrad.

$P(E, M) \hat{=}$ Wahrscheinlichkeit, dass System Energie E und Magnetisierung M hat

$\rightarrow P(E, M) = \Omega(E, M) \cdot w_n = \Omega(E, M) C e^{\frac{1}{k}(\gamma E_r + \delta M_s)}$ ✓

d) $\frac{\partial P}{\partial E} \stackrel{!}{=} 0$: (wahrscheinlichste Energie) ✓

$$= \frac{\partial \Omega}{\partial E} \cdot \frac{1}{k} (\delta E_r + \delta M_s) + \Omega \left(e^{\frac{1}{k} (\delta E_r + \delta M_s)} \right) \cdot \frac{\delta}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} (\delta E_r + \delta M_s) \left(\frac{\partial \Omega}{\partial E} + \Omega \frac{\delta}{k} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial \Omega}{\partial E} + \Omega \frac{\delta}{k} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial E} \right) \frac{1}{\Omega} = \frac{\delta}{k}$$

• $\frac{\partial P}{\partial M} \stackrel{!}{=} 0$: (Wahrscheinlichste Magnetisierung)

$$- \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} \right) \frac{1}{\Omega} = \frac{\delta}{k}$$

• $S = k \ln(\Omega)$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{k}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial E} = -\gamma \quad \left. \vphantom{\frac{\partial S}{\partial E}} \right\} \gamma = - \frac{\partial S}{\partial E} \checkmark$$

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \frac{k}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial M} = -\delta \quad \left. \vphantom{\frac{\partial S}{\partial M}} \right\} \delta = - \frac{\partial S}{\partial M} \checkmark$$

• $dE = d\langle E \rangle = d\bar{E}$

$$\stackrel{!}{=} k \quad dE = T dS + H dM \Leftrightarrow dS = \frac{dE}{T} - \frac{H}{T} dM$$

$$\rightarrow - \frac{dS}{dE} = - \frac{1}{T} = \gamma$$

$$\rightarrow - \frac{dS}{dM} = \frac{H}{T} = \delta \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow w_n = \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{1}{kT} (E_r - H M_s)} \hat{=} \frac{1}{Z_k} e^{-\beta (E_r - H M_s)} \\ = \frac{1}{Z_k} e^{-\beta E_r + \beta H M_s} \quad \checkmark$$

e) $F = E - TS - HM$

$$= \sum_n E_r w_n + T k \sum_n w_n \ln(w_n) - H \sum_n M_s w_n$$

$$= \sum_n E_r w_n + k T \sum_n w_n \left[\ln\left(\frac{1}{Z_k}\right) + \ln\left(e^{-\beta (E_r - H M_s)}\right) \right] - H M_s w_n$$

$$= \sum_n E_r w_n + k T \sum_n w_n (-\ln(Z_k) - \beta E_r + \beta H M_s) - H M_s w_n$$

$$= \sum_n - \ln(z_n) kT w_n = -kT \ln(Z)$$

$$\Leftrightarrow z_n = \exp\left(-\frac{F}{kT}\right) \quad \checkmark \quad \Sigma (5/15)$$

Σ (9/10) Sehr schöne Aufgaben über das gesamte Semester hinweg! ☺