Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierte Materie

Moderne Theoretische Physik III (Einführung in die Theorie der Kondensierten Materie) SS 2024

Prof. Dr. A. D. Mirlin
Dr. Risto Ojajärvi and Dr. Paul Pöpperl

Blatt 0
Präsenzübung am 19.04.2024

---

1. Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme (Wiederholung zur Mod. Theo II) (0 Punkte)

(a) Schreiben Sie den Spin-Operator $\vec{S}$ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Systems in der S_z-Basis. Die Spins befinden sich in einem Magnetfeld $\vec{B}$, mit gyromagnetischem Verhältnis g. Wie lautet der Hamilton-Operator?

(b) N nicht-wechselwirkende Spins-$\frac{1}{2}$ befinden sich in einen System mit Magnetfeld $\vec{B}$. Berechnen Sie die Freie Energie.

(c) Bestimmen Sie die magnetische Suszeptibilität χ.

2. Mini-Ising-Kette (0 Punkte)

Betrachten Sie $N = 3$ wechselwirkende Ising-Spins. Der erste und dritte Spin sind dabei nicht verbunden. Der Hamilton-Operator ist gegeben durch:

$$\mathcal{H} = -J(s_1^z s_2^z + s_2^z s_3^z) - \gamma B(s_1^z + s_2^z + s_3^z), \tag{1}$$

wobei B die Stärke des Magnetfeldes ist, γ die Stärke der Kopplung zwischen Spins und Magnetfeld, und J die Austauschwechselwirkung.

(a) Bestimmen Sie die Energien der möglichen Mikrozustände (d.h. der Eigenzustände des Hamilton-Operators).

(b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, B)$.

(c) Im Fall $B = 0$, bestimmen Sie die Freie Energie. Bestimmen Sie damit die Wärmekapazität c_B bei konstantem Feld $B = 0$.

(d) Das Ising-Modell ist eines der einfachsten Modelle in der Vielteilchenphysik, weil die lokale Dimension pro Gitterplatz nur 2 ist (das Minimum für nichttriviale Vielteilchenphysik). Nehmen Sie an, dass ein Rechner eine Million Zustände pro Sekunde berechnen kann für so ein wechselwirkendes System. Was ist dann die maximale Größe N des Gitters, falls der Rechner einen Tag Zeit hat, um alle Zustände zu betrachten? Was ist die maximale Größe, wenn der Rechner ein Jahr lang Zeit hat?

3. Zustandssummen (0 Punkte)

(a) Die großkanonische Zustandssumme ist definiert als

$$Z = \mathrm{Tr}\left[\exp\Big(-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\Big)\right], \tag{2}$$

wobei $\hat{H}$ der Hamilton-Operator des Systems und $\hat{N}$ der Teilchenzahloperator ist. Unter der Annahme, dass das System nicht wechselwirkend ist, leiten Sie die übliche Form der großkanonischen Zustandssumme in Besetzungszahldarstellung

$$Z = \prod_{\lambda} \sum_{n_\lambda} \exp(-n_\lambda \beta(\varepsilon_\lambda - \mu)) \tag{3}$$

her und erklären Sie die Symbole λ, n_λ und ε_λ.

(b) Vereinfachen Sie den Ausdruck (3) für Bosonen / Fermionen.

(c) Nehmen Sie jetzt an, dass das System wechselwirkend ist und erklären Sie, warum die Vereinfachungen aus Teil (a) nicht mehr angewendet werden können.

(d) Betrachten Sie die klassische kanonische Zustandssumme eines N-Teilchen Systems

$$Z = \frac{1}{N!} \int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}^3 p_i \, \mathrm{d}^3 x_i}{(2\pi\hbar)^3} \right) \exp(-\beta H(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{p}_i\})). \tag{4}$$

Geben Sie im allgemeinen die Hamiltonfunktion eines nicht-wechselwirkenden N-Teilchen-Systems an. Welche Terme kommen dazu, wenn eine paarweise Wechselwirkung eingeführt wird? Welche Vereinfachung kann im nicht-wechselwirkenden Fall gemacht werden, und warum geht das im welchselwirkenden Fall nicht?