

**Moderne Theoretische Physik III (Einführung in die Theorie der  
Kondensierten Materie) SS 2024**

Prof. Dr. A. D. Mirlin

Blatt 5, Abgabe bis 01.07.2024

Dr. Risto Ojajärvi and Dr. Paul Pöpperl

Besprechung 05.07.2024

**1. Eigenschaften des BCS-Grundzustandes** (10 + 10 + 10 + 5 = 35 Punkte)

Der BCS Grundzustand

$$|\Phi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle \quad (1)$$

wurde in der Vorlesung (Gleichung (2.203)) eingeführt. Es gelte  $\Delta = \Delta^*$  für die Energielücke (siehe Vorlesung unter Gleichung (2.201)).

(a) Zeigen Sie, dass der Zustand normiert ist:

$$\langle \Phi_{\text{BCS}} | \Phi_{\text{BCS}} \rangle = 1 \quad (2)$$

(b) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung des Elektron-Zahloperators

$$N = \sum_{\mathbf{k},\sigma} c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k},\sigma} \quad (3)$$

im BCS-Grundzustand.

*Hinweis: Spalten Sie  $N$  in  $N_{\uparrow} = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{\mathbf{k},\uparrow}$  und  $N_{\downarrow}$  auf. Drücken Sie die Elektronen-*

*Erzeuger und Vernichter  $c^{\dagger}, c$  durch die Bogoliubov-Operatoren  $b, b^{\dagger}$  aus (wie wirken diese auf den BCS-Grundzustand?).*

(c) Wir definieren den Erzeugungsoperator eines Cooper-Paares als  $B_{\mathbf{k}}^{\dagger} := c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}$ . Berechnen Sie den Erwartungswert  $\langle B_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rangle$  im BCS-Grundzustand. Zeigen Sie, dass  $\langle B_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rangle$  als Funktion von  $k$  ein Maximum beim Fermi-Impuls hat (nehmen Sie hierbei der Einfachheit halber eine impulsunabhängige Gap  $\Delta$  an).

(d) Berechnen Sie die Kommutatoren  $[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}^{\dagger}]$ ,  $[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}]$  und  $[B_{\mathbf{k}}^{\dagger}, B_{\mathbf{k}'}^{\dagger}]$  und deren Erwartungswerte im BCS-Grundzustand. Beantworten Sie anhand ihrer Ergebnisse, ob Cooper-Paare Bosonen sind.

*Die Relationen*

$$[ab, c] = a\{b, c\} - \{a, c\}b, \quad [ab, c] = a[b, c] + [a, c]b, \quad (4)$$

*mit beliebigen Operatoren  $a, b$  und  $c$  können hilfreich sein.*

**2. Meissner effect** (10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 40 Punkte +10 Bonuspunkte)

In den Vorlesungen (Abschnitt 2.9.1) wurde gezeigt, dass das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  in einem Supraleiter der Gleichung

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda^2, \quad (5)$$

genügt, wobei  $\lambda$  die London-Eindringtiefe ist.

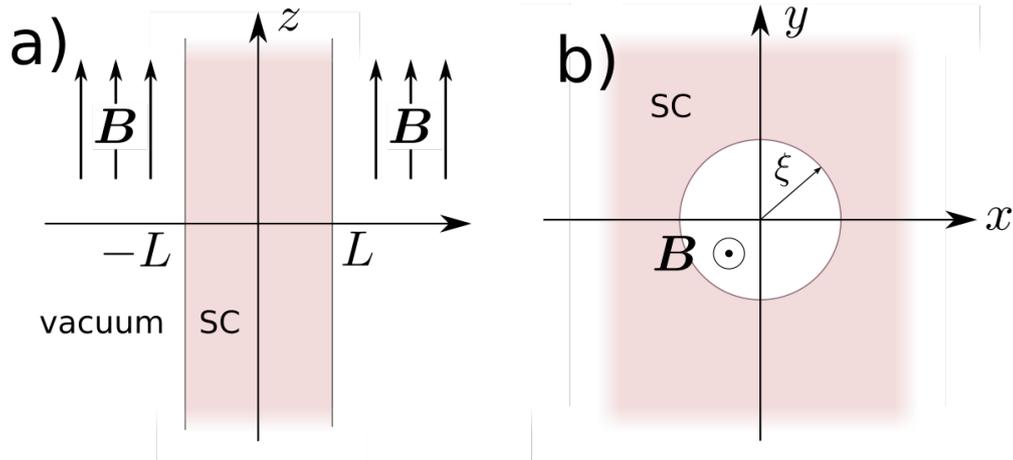


Abbildung 1: a) Dünne supraleitende Platte (SC) in externen Magnetfeld. b) Querschnitt eines Supraleiters (SC) mit Vortex (großer weißer Kreis).

- (a) Betrachten Sie eine dünne supraleitende Platte mit Dicke  $2L$  (vgl. Abb. 1a). Die Oberflächen der Platte sind parallel zur  $y - z$ -Ebene. Ein magnetisches Feld mit Stärke  $B_0$  wird parallel zu den Plattenoberflächen in  $z$ -Richtung angelegt. Gleichung (5) nutzend, zeigen Sie, dass das Feld in der Platte gegeben ist durch

$$B_z(x) = B_0 \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(L/\lambda)}. \quad (6)$$

- (b) Ein magnetisches Feld kann einen Supraleiter auch durchdringen indem ein Vortex gebildet wird—eine normalleitende Region, die von Meissner-Strömen umgeben ist. In dieser Aufgabe wird ein magnetisches Feld in  $z$ -Richtung mit Stärke  $B_0$  auf einen Supraleiter angewendet. Wir beschreiben einen Vortex als zylindrische, normalleitende Region mit Radius  $\xi$ , wobei

- Das Feld für  $r < \xi$  gegeben ist durch  $B_z(r) = B_0$ .
- Das Feld in der supraleitenden Region  $r > \xi$  durch Gl. (5) beschrieben wird.

Siehe dazu Abb. 1b. Das Feld ist stetig an der Grenze zwischen Supra- und Normalleiter.

Nutzen Sie die Symmetrie des Problems um zu zeigen, dass das magnetische Feld innerhalb des Supraleiters der Besseldifferentialgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dB_z}{dr} \right) = \frac{B_z}{\lambda^2} \quad (7)$$

genügt.

- (c) Für kleine  $r \ll \lambda$  kann die rechte Seite der Besseldifferentialgleichung (7) durch 0 genähert werden. Zeigen Sie, dass diese Näherung zu

$$B_z(r) = a \ln(r) + b \quad (8)$$

führt, wobei  $a$  und  $b$  Konstanten sind, die Sie hier nicht bestimmen müssen.

- (d) Berechnen Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen den Strom, der aus dem Magnetfeld aus Teilaufgabe (c) resultiert, und bestimmen Sie das entsprechende Vektorpotential. Drücken Sie die Konstante  $a$  aus Gleichung (8) durch den Fluss  $\Phi$  durch den Zylinder aus.

- (e) (**Bonus**) Lösen Sie die Besselgleichung (7) indem Sie fordern, dass das Feld im Limit  $r \rightarrow \infty$  verschwindet und ausserdem die Randbedingung  $B_z(\xi) = B_0$  erfüllt. Sie können die asymptotischen Entwicklungen [Abramowitz-Stegun (1972), Gleichungen 9.2.1 and 9.2.2]:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi, \quad (9)$$

$$Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi. \quad (10)$$

der Besselfunktionen nutzen. Diese Entwicklungen gelten für große  $|z|$ .

### 3. Kritisches Feld in der Ginzburg-Landau-Theorie (5 + 10 + 10 = 25 Punkte)

Wir betrachten einen Supraleiter im homogenen externen Feld  $\mathbf{H}$ . Anhand des Ginzburg-Landau-Freie-Energiedichte-Funktional

$$F_H(T, H) = F_H^{(n)}(T, 0) + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \left( -i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{4\pi} \quad (11)$$

(Gleichung (2.284) im Skript) soll die kritische Feldstärke  $H_c$  gefunden werden. Dabei gelten für den Supraleiter die gleichen Annahmen wie in Abschnitt 2.9.2 des Skriptes (“Critical magnetic field”).

- Bestimmen Sie die Freie-Energie-Dichte im Normalzustand (“normal state”). Beschreiben Sie hierzu was mit den einzelnen Termen von Gleichung (11) passiert.
- Bestimmen Sie die Freie-Energie-Dichte im supraleitenden Zustand, tief innerhalb des Supraleiters.
- Finden Sie das kritische Feld  $H_c$ . Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus der BCS-Theorie (Vorlesungsabschnitt 2.9.3).