

**Moderne Theoretische Physik III (Einführung in die Theorie der
Kondensierten Materie) SS 2024**

Prof. Dr. A. D. Mirlin

Blatt 5, Abgabe bis 01.07.2024

Dr. Risto Ojajärvi and Dr. Paul Pöpperl

Besprechung 05.07.2024

1. Eigenschaften des BCS-Grundzustandes (10 + 10 + 10 + 5 = 35 Punkte)

Der BCS Grundzustand

$$|\Phi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle \quad (1)$$

wurde in der Vorlesung (Gleichung (2.203)) eingeführt. Es gelte $\Delta = \Delta^*$ für die Energielücke (siehe Vorlesung unter Gleichung (2.201)).

(a) Zeigen Sie, dass der Zustand normiert ist:

$$\langle \Phi_{\text{BCS}} | \Phi_{\text{BCS}} \rangle = 1 \quad (2)$$

Lösung: Mit Definition des BCS-Grundzustandes:

$$\langle \Phi_{\text{BCS}} | \Phi_{\text{BCS}} \rangle = \langle 0 | \prod_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} c_{-\mathbf{k}',\downarrow} c_{\mathbf{k}',\uparrow}^{\dagger}) (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle \quad (3)$$

Hierbei müssen wir beim hermitesch konjugierten Operator nicht auf die Reihenfolge der Terme mit verschiedenen Impulsen achten da diese kommutieren ($c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger}$ und $c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}$ sind fermionische Operatoren und *antikommutieren* daher, aber da diese Operatoren jeweils in Zweierpaaren im Produkt auftauchen kommutieren die Faktoren). Wir haben genutzt, dass $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ bei reellem Δ auch reell sind (siehe Vorlesung unter Gleichung (2.191)).

Wir sortieren die Terme nach Impuls (Terme mit ungleichen Impulsen kommutieren, siehe oben):

$$\langle \Phi_{\text{BCS}} | \Phi_{\text{BCS}} \rangle = \langle 0 | \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger}) (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle \quad (4)$$

Jetzt nutzen wir

$$(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger}) (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle = (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 + u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle. \quad (5)$$

Da die Zustände (\mathbf{k}, \uparrow) und $(-\mathbf{k}, \downarrow)$ von keinem verbleibenden Operator im Produkt vernichtet werden fallen alle Terme mit verbleibenden Erzeugungsoperatoren nach Projektion auf $\langle 0 |$ weg. Wir erhalten

$$\langle \Phi_{\text{BCS}} | \Phi_{\text{BCS}} \rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) = 1 \quad (6)$$

wobei wir Gleichung (2.193) aus dem Skript verwendet haben.

(b) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung des Elektron-Zahloperators

$$N = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} c_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma} \quad (7)$$

im BCS-Grundzustand.

Hinweis: Spalten Sie N in $N_\uparrow = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}, \uparrow}$ und N_\downarrow auf. Drücken Sie die Elektronen-

Erzeuger und Vernichter c^\dagger, c durch die Bogoliubov-Operatoren b, b^\dagger aus (wie wirken diese auf den BCS-Grundzustand?).

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir [Gleichung (2.195)]

$$c_{\mathbf{k}, \sigma} = u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}, \sigma} + \sigma v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, -\sigma}^\dagger \quad (8)$$

$$c_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger = u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger + \sigma v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, -\sigma} \quad (9)$$

Da die Bogoliubov-Vernichter $b_{\pm \mathbf{k}, \sigma}$ den BCS-Grundzustand vernichten

$$b_{\pm \mathbf{k}} |\Phi_{\text{BCS}}\rangle = 0 \quad (10)$$

und die fermionischen Antikommutatorrelationen

$$\{b_{\mathbf{k}, \sigma}, b_{\mathbf{k}', \sigma'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'} \quad (11)$$

erfüllen, können wir ihre Erwartungswerte im BCS-Grundzustand wie die von freien Fermionen im Vakuum berechnen. Wir haben also

$$\langle N_\uparrow \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \langle \Phi_{\text{BCS}} | \left(u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, \downarrow} \right) \left(u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}, \uparrow} + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger \right) | \Phi_{\text{BCS}} \rangle \quad (12)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2. \quad (13)$$

Eine analoge Rechnung für N_\downarrow gibt das gleiche Ergebnis. Wir erhalten also für den Erwartungswert

$$\langle N \rangle = \langle N_\uparrow \rangle + \langle N_\downarrow \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 \quad (14)$$

(hier und im Folgenden nutzen wir Linearität des Erwartungswertes).

Für die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle N^2 - 2N\langle N \rangle + \langle N \rangle^2 \rangle} \quad (15)$$

$$= \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2} \quad (16)$$

(Linearität des Erwartungswertes, $\langle N \rangle$ und $\langle N^2 \rangle$ sind Zahlen) brauchen wir auch noch $\langle N^2 \rangle$:

$$\langle N^2 \rangle = \langle N_\downarrow^2 \rangle + \langle N_\uparrow^2 \rangle + 2\langle N_\uparrow N_\downarrow \rangle \quad (17)$$

$$\langle N_\uparrow^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left\langle v_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}', \downarrow} \left(u_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}', \uparrow} + v_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}', \downarrow}^\dagger \right) \left(u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}, \uparrow} + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger \right) v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger \right\rangle \quad (18)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} \langle b_{-\mathbf{k}', \downarrow} b_{\mathbf{k}', \uparrow} b_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger b_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger \rangle + v_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \langle b_{-\mathbf{k}', \downarrow} b_{-\mathbf{k}', \downarrow}^\dagger b_{-\mathbf{k}, \downarrow} b_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger \rangle \right) \quad (19)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (v_{\mathbf{k}'}^2 u_{\mathbf{k}}^2 \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}'}^2) = \langle N_\downarrow^2 \rangle. \quad (20)$$

Hier haben wir in der ersten Zeile genutzt, dass $b_{\pm\mathbf{k}}$ nach rechts und $b_{\pm\mathbf{k}}^\dagger$ nach links den Grundzustand vernichten. Im letzten Schritt haben wir genutzt dass Zustände mit unterschiedlichen Besetzungen orthogonal sind. Im ersten Term muss $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, da sonst der Zustand (\mathbf{k}, \uparrow) nicht vernichtet wird.

Wir verfahren ähnlich, um den Mischterm zu berechnen:

$$\langle N_\uparrow N_\downarrow \rangle = - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \left\langle b_{-\mathbf{k}', \downarrow} \left(u_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}', \uparrow} + v_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}', \downarrow}^\dagger \right) \left(u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger - v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, \uparrow} \right) b_{-\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger \right\rangle \quad (21)$$

$$= - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} \left\langle b_{-\mathbf{k}', \downarrow} b_{\mathbf{k}', \uparrow} b_{\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger b_{-\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger \right\rangle - v_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \left\langle b_{-\mathbf{k}', \downarrow} b_{-\mathbf{k}', \downarrow}^\dagger b_{-\mathbf{k}, \uparrow} b_{-\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger \right\rangle \right) \quad (22)$$

$$= - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \left(-u_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} \left\langle b_{-\mathbf{k}', \downarrow} b_{\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger b_{\mathbf{k}', \uparrow} b_{-\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger \right\rangle - v_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \right) \quad (23)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}}^2 \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} \right) \quad (24)$$

$$= \left[\sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \right] \quad (25)$$

Hierbei haben wir $u_{\mathbf{k}} = u_{-\mathbf{k}}$ genutzt. Insgesamt erhalten wir

$$\langle N^2 \rangle = 4 \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}}^2 + 4 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}'}^2 \quad (26)$$

und damit

$$\sigma = 2 \sqrt{\sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}}^2} \quad (27)$$

- (c) Wir definieren den Erzeugungsoperator eines Cooper-Paares als $B_{\mathbf{k}}^\dagger := c_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle B_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle$ im BCS-Grundzustand. Zeigen Sie, dass $\langle B_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle$ als Funktion von k ein Maximum beim Fermi-Impuls hat (nehmen Sie hierbei der Einfachheit halber eine impulsunabhängige Gap Δ an).

Lösung:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\text{BCS}} | c_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger | \Phi_{\text{BCS}} \rangle &= \langle \Phi_{\text{BCS}} | (u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, \downarrow}) (u_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger - v_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}, \uparrow}) | \Phi_{\text{BCS}} \rangle \\ &= u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Wir wissen aus der Vorlesung, Gleichungen (2.198) und (2.199), dass

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \right)}, \quad v_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \right)},$$

daher finden wir

$$\langle B_k^\dagger \rangle = \frac{1}{2} \frac{|\Delta|}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}} = \frac{1}{2} \frac{|\Delta|}{\sqrt{(\hbar^2 k^2 / (2m) - \mu)^2 + \Delta^2}}. \quad (29)$$

Dieser Ausdruck als Funktion von k wird maximal wenn der Nenner minimal wird— bei $\xi_k = 0$, also an der Fermi-Kante.

- (d) Berechnen Sie die Kommutatoren $[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}^\dagger]$, $[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}]$ und $[B_{\mathbf{k}}^\dagger, B_{\mathbf{k}'}^\dagger]$ und deren Erwartungswerte im BCS-Grundzustand. Beantworten Sie anhand ihrer Ergebnisse, ob Cooper-Paare Bosonen sind.

Die Relationen

$$[ab, c] = a\{b, c\} - \{a, c\}b, \quad [ab, c] = a[b, c] + [a, c]b, \quad (30)$$

mit beliebigen Operatoren a , b und c können hilfreich sein.

Lösung: Für

$$[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}] = [B_{\mathbf{k}}^\dagger, B_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \quad (31)$$

weil alle enthaltenen Elektronenoperatoren miteinander antikommutieren (siehe Hinweis (30)). Dieser Teil stimmt mit den bosonischen Kommutatorrelationen überein. Andererseits:

$$[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [c_{-k\downarrow}c_{k\uparrow}, c_{k'\uparrow}^\dagger c_{-k'\downarrow}^\dagger] \quad (32)$$

$$= c_{-k\downarrow}[c_{k\uparrow}, c_{k'\uparrow}^\dagger c_{-k'\downarrow}^\dagger] + [c_{-k\downarrow}, c_{k'\uparrow}^\dagger c_{-k'\downarrow}^\dagger]c_{k\uparrow} \quad (33)$$

$$= c_{-k\downarrow}\{c_{k\uparrow}, c_{k'\uparrow}^\dagger\}c_{-k'\downarrow}^\dagger - c_{-k\downarrow}c_{k'\uparrow}^\dagger\{c_{k\uparrow}, c_{-k'\downarrow}^\dagger\} \quad (34)$$

$$+ \{c_{-k\downarrow}, c_{k'\uparrow}^\dagger\}c_{-k'\downarrow}^\dagger c_{k\uparrow} - c_{k'\uparrow}^\dagger\{c_{-k\downarrow}, c_{-k'\downarrow}^\dagger\}c_{k\uparrow} \quad (35)$$

$$= \left(c_{-k\downarrow}c_{-k\downarrow}^\dagger - c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow}\right) \delta_{k,k'} \quad (36)$$

$$= (1 - N_{-k\downarrow} - N_{k\uparrow}) \delta_{k,k'}. \quad (37)$$

Das ist keine bosonische Kommutatorrelation für $k = k'$. Daher sind Cooper-Paare keine Bosonen.

2. Meissner effect (10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 40 Punkte +10 Bonuspunkte)

In den Vorlesungen (Abschnitt 2.9.1) wurde gezeigt, dass das magnetische Feld \mathbf{B} in einem Supraleiter der Gleichung

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda^2, \quad (38)$$

genügt, wobei λ die London-Eindringtiefe ist.

- (a) Betrachten Sie eine dünne supraleitende Platte mit Dicke $2L$ (vgl. Abb. 1a). Die Oberflächen der Platte sind parallel zur $y - z$ -Ebene. Ein magnetisches Feld mit Stärke B_0 wird parallel zu den Plattenoberflächen in z -Richtung angelegt. Gleichung (38) nutzend, zeigen Sie, dass das Feld in der Platte gegeben ist durch

$$B_z(x) = B_0 \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(L/\lambda)}. \quad (39)$$

Lösung: In diesem Fall gilt $\mathbf{B}(x, y, z) = B_z(x)\mathbf{e}_z$, und die Gleichung für B_z ist

$$\frac{d^2 B_z}{dx^2} = \frac{B_z}{\lambda^2},$$

mit der allgemeinen Lösung

$$B_z(x) = Ae^{x/\lambda} + Be^{-x/\lambda}.$$

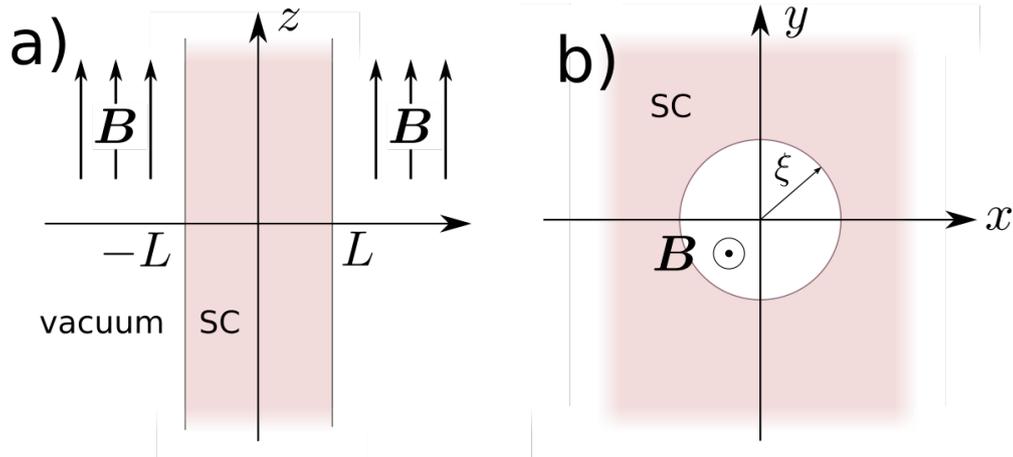


Abbildung 1: a) Dünne supraleitende Platte (SC) in externen Magnetfeld. b) Querschnitt eines Supraleiters (SC) mit Vortex (großer weißer Kreis).

Die Randbedingungen schreiben $B_z(\pm L) = B_0$ vor. Aus der Spiegelsymmetrie in der $y - z$ -Ebene folgt, dass $A = B$. Daher

$$B_z(x) = A(e^{x/\lambda} + e^{-x/\lambda}) = 2A \cosh(x/\lambda).$$

Mit $A = B_0/2 \cosh(L/\lambda)$ sind die Randbedingungen erfüllt.

- (b) Ein magnetisches Feld kann einen Supraleiter auch durchdringen indem ein Vortex gebildet wird—eine normalleitende Region, die von Meissner-Strömen umgeben ist. In dieser Aufgabe wird ein magnetisches Feld in z -Richtung mit Stärke B_0 auf einen Supraleiter angewendet. Wir beschreiben einen Vortex als zylindrische, normalleitende Region mit Radius ξ , wobei

- Das Feld für $r < \xi$ gegeben ist durch $B_z(r) = B_0$.
- Das Feld in der supraleitenden Region $r > \xi$ durch Gl. (38) beschrieben wird.

Siehe dazu Abb. 1b. Das Feld ist stetig an der Grenze zwischen Supra- und Normalleiter.

Nutzen Sie die Symmetrie des Problems um zu zeigen, dass das magnetische Feld innerhalb des Supraleiters der Besselgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_z}{dr} \right) = \frac{B_z}{\lambda^2} \quad (40)$$

genügt.

Lösung: Wir nutzen https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates. Die Symmetrie des Problems impliziert

$$B_z(r, \varphi, z) = B_z(r) \quad (41)$$

$$B_\varphi(r, \varphi, z) = B_\varphi(r) \quad (42)$$

$$B_r(r, \varphi, z) = B_r(r) \quad (43)$$

Mit dieser Symmetrie kann der skalare Laplace-Operator geschrieben werden als

$$\nabla^2 B_z(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \quad (44)$$

Die z -Komponente der linken Seite von Gleichung (38) ergibt also

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla^2 \mathbf{B}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \quad (45)$$

und wir finden die gesuchte Gleichung.

B_φ und B_r erfüllen ähnliche Differentialgleichungen (mit einigen Extra-Termen), aber da das externe Feld nur in z -Richtung wirkt werden die zugehörigen Randbedingungen durch $B_\varphi = B_r = 0$ erfüllt.

- (c) Für kleine $r \ll \lambda$ kann die rechte Seite der Besselgleichung (40) durch 0 genähert werden. Zeigen Sie, dass diese Näherung zu

$$B_z(r) = a \ln(r) + b \quad (46)$$

führt, wobei a und b Konstanten sind, die Sie hier nicht bestimmen müssen.

Lösung: Mit der Kettenregel und rechter Seite null gesetzt wird die Bessel-Gleichung zu

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_z}{dr} \right) = \frac{dB_z}{dr} + r \frac{d^2 B_z}{dr^2} = 0. \quad (47)$$

Wir definieren $f(r) = \frac{dB_z}{dr}$. $f(r)$ erfüllt die Gleichung

$$f(r) + r f'(r) = 0; \quad f'(r) := \frac{df(r)}{dr}.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $f(r) = C/r$. Daher finden wir wie gefordert

$$B_z(r) = \int dr f(r) + b = a \ln r + b.$$

- (d) Berechnen Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen den Strom, der aus dem Magnetfeld aus Teilaufgabe (c) resultiert, und bestimmen Sie das entsprechende Vektorpotential. Drücken Sie die Konstante a aus Gleichung (46) durch den Fluss Φ durch den Zylinder aus.

Lösung: Der Strom wird mit Hilfe des statischen Ampère-Gesetzes gefunden (in Gauss'schen Einheiten):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \quad (48)$$

Wir finden

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial r} \mathbf{e}_\phi = -\frac{ac}{4\pi r} \mathbf{e}_\phi, \quad (49)$$

wobei \mathbf{e}_ϕ der tangentielle Einheitsvektor in zylindrischen Koordinaten ist.

Mit der London-Gleichung [Gl. (2.226) im Skript] ergibt sich das Vektorpotential,

$$\mathbf{A} = -\frac{a\lambda^2}{4\pi r} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (50)$$

wobei $\lambda = (mc^2/n_s e^2)^{1/2}$ die Eindringtiefe ist.

Um den Fluss zu bestimmen nutzen wir den Satz von Stokes und $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{a\lambda^2}{2} \quad (51)$$

Folglich ist die Konstante a gegeben durch

$$a = -\frac{2\Phi}{\lambda^2}.$$

- (e) (**Bonus**) Lösen Sie die Besselgleichung (40) indem Sie fordern, dass das Feld im Limit $r \rightarrow \infty$ verschwindet und ausserdem die Randbedingung $B_z(\xi) = B_0$ erfüllt. Sie können die asymptotischen Entwicklungen [Abramowitz-Stegun (1972), Gleichungen 9.2.1 and 9.2.2]:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi, \quad (52)$$

$$Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi. \quad (53)$$

der Besselfunktionen nutzen. Diese Entwicklungen gelten für große $|z|$.

Lösung: Die allgemeine Lösung der Besselgleichung ist

$$B_z(r) = C J_0(ir/\lambda) + D Y_0(-ir/\lambda), \quad (54)$$

mit den Besselfunktionen erster- und zweiter Gattung J_0 und Y_0 und Konstanten C and D , die durch die Randbedingungen bestimmt werden.

Mit dem Mathematica-Kommando

```
Series[BesselJ[0, I r/l] c + BesselY[0, -I r/l] d, r, Infinity, 1] //Normal
//FullSimplify
```

finden wir die folgende asymptotische Entwicklung dieser Funktionen:

$$B_z(r) \approx \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi r}} (C - iD) e^{r/\lambda} \quad (55)$$

Wenn wir $D = -iC$ setzen verschwindet das Feld für $r \rightarrow \infty$. Die damit in resultierende Kombination von Besselfunktionen in Gl. (54) kann durch K_0 , die modifizierte Besselfunktion zweiter Gattung, ausgedrückt werden:

$$C[J_0(ir/\lambda) - iY_0(-ir/\lambda)] = \frac{2iCK_0(r/\lambda)}{\pi}. \quad (56)$$

K_0 nimmt für reelle Argumente reelle Werte an.

Um die Randbedingung $B_z(\xi) = B_0$ zu erfüllen setzen wir

$$C = \frac{\pi B_0}{2iK_0(\xi/\lambda)}. \quad (57)$$

Die volle Lösung ist daher

$$B_z(r) = B_0 \frac{K_0(r/\lambda)}{K_0(\xi/\lambda)}. \quad (58)$$

3. Kritisches Feld in der Ginzburg-Landau-Theorie (5 + 10 + 10 = 25 Punkte)

Wir betrachten einen Supraleiter im homogenen externen Feld \mathbf{H} . Anhand des Ginzburg-Landau-Freie-Energiedichte-Funktional

$$F_H(T, H) = F_H^{(n)}(T, 0) + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \left(-i\hbar\nabla + \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{4\pi} \quad (59)$$

(Gleichung (2.284) im Skript) soll die kritische Feldstärke H_c gefunden werden. Dabei gelten für den Supraleiter die gleichen Annahmen wie in Abschnitt 2.9.2 des Skriptes (“Critical magnetic field”).

- (a) Bestimmen Sie die Freie-Energie-Dichte im Normalzustand (“normal state”). Beschreiben Sie hierzu was mit den einzelnen Termen von Gleichung (59) passiert.

Lösung: Im normal state gilt per Definition für den Ordnungsparameter $\psi = 0$. Da für den Supraleiter im normal state $\mu = 1$ gilt (Skript Abschnitt 2.9.2 unter Gleichung (2.245)) haben wir auch $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Wir erhalten

$$F_H(T, H) = F_H^{(n)}(T, 0) - \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}. \quad (60)$$

- (b) Bestimmen Sie die Freie-Energie-Dichte im supraleitenden Zustand, tief innerhalb des Supraleiters.

Lösung: Tief im Supraleiter gilt $\mu = 0$, das Magnetfeld wird also vollständig abgeschirmt (Vergleiche auch Skript unter Gleichung (2.246)). Im feldfreien, homogenen Fall gilt

$$|\psi|^2 = -\frac{a}{b} = \frac{\alpha T_c - T}{b T_c} \quad (61)$$

(Skript, Gleichung (2.288)). Insgesamt ergibt sich

$$F_H(T, H) = F_H(T, 0) - \frac{a^2}{2b} \quad (62)$$

Da wir eine räumlich homogene Situation betrachten fällt der Gradiententerm weg. Da das magnetische Feld verschwindet gibt es auch kein Vektorpotential.

- (c) Finden Sie das kritische Feld H_c . Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus der BCS-Theorie (Vorlesungsabschnitt 2.9.3).

Lösung: Das kritische Feld beschreibt den Übergang zwischen Normal- und supraleitendem Zustand (siehe auch Abschnitt 2.9.2). Daher setzen wir Ergebnisse (60) und (62) gleich und finden

$$H_c^2 = \frac{4\pi a^2}{b} = \frac{4\pi \alpha^2 \tau^2}{b}. \quad (63)$$

Das BCS-Ergebnis für das kritische Feld lautet

$$H_c^2 \approx (1.735 H_C(0))^2 \tau^2 = 1.735^2 4\pi \nu_0 (1.76 \cdot k_B T_c)^2 \tau^2. \quad (64)$$

(Gleichung (2.249), (2.250), (2.218)), $\tau = (T - T_c)/T_c$.

Das Ginzburg-Landau-Ergebnis hat also die korrekte Temperaturabhängigkeit. Ausserdem können wir das Verhältnis α^2/b zwischen den phänomenologischen Koeffizienten α und b durch mikroskopischen Größen ausdrücken.