Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 3

Kirill Melnikov
TTP KIT
April 24, 2024

3 Partialwellen

Wir wollen eine Darstellung für den Wirkungsquerschnitt herleiten bei der wir Quantenzustände mit bestimmten Bahn-Drehimpulse betrachten. Um diese Darstellung zu konstruieren, fangen wir mit der Schrödingergleichung an

$$\left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r}), \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{3.1}$$

Wir nehmen an dass Potential $V(\vec{r})$ ein Zentralpotential ist, $V(\vec{r}) = V(r)$. Als die Wellenfunktion benuzen wir die Wellenfunktion mit gegebenem Bahn-Drehimpuls $\psi_{klm}(\vec{r}) = Y_{lm}(\theta,\varphi)u_{kl}(r)/r$. Wir erhalten dann

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u_{kl}}{\mathrm{d}r^2} + \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mV(r)}{\hbar^2}\right]u_{kl} = k^2 u_{kl}. \tag{3.2}$$

Wir betrachten große Werte des Ortsvektors $\vec{r}$, $r \to \infty$. Wie nehmen an dass das Potenzial im Limit $r \to \infty$ zur Null geht[1]

$$\lim_{r\to\infty} V(r) \to 0 \tag{3.3}$$

Wir erhlaten dann eine freie Glecihung für u_{kl}

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u_{kl}}{\mathrm{d}r^2} = k^2 u_{kl}, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad r \to \infty. \tag{3.4}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$u_{kl}(r) = A_{kl}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \tag{3.5}$$

Die Phase der Lösung ist hier so gewählt dass für $V(r) = 0$, $\delta_l = 0$ ist. An dieser Stelle es ist zu betonen, dass falls wir δ_l wissen wollen, sollen wir die Schrödingergleichung Gl. (3.2) lösen.

Die asymptotische Form der Wellenfunktion, die wir benutzen um elastische Streuung zu beschreiben, lautet

$$\psi(\vec{r})|_{\vec{r}\to\infty} = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}\,e^{ikr}. \tag{3.6}$$

[1] Tatsächlich soll sogar eine starkere Bedingung, $\lim_{r\to\infty} rV(r) \to 0$, erfühlt sein.

Wir können $\psi(\vec{r})$ durch Zustände mit bestimmtem Drehimpuls ψ_{klm} schreiben[2]

$$\psi(\vec{r})|_{\vec{r}\to\infty} = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}\, e^{ikr} = \sum_{l}^{\infty} C_l P_l(\cos\theta)\frac{\sin(kr - \pi l/2 + \delta_l)}{kr}. \quad (3.7)$$

Aus unserer Diskussion des optischen Theorems wissen wir, dass

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr}\sum_{l=0}^{\infty}\left((2l+1)P_l(\cos\theta)e^{ikr} - (2l+1)P_l(\cos\theta)(-1)^l e^{-ikr}\right) \quad (3.8)$$

Wir vergleichen Gl. (3.7) und Gl. (3.8) und erhalten zwei weitere Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta) + 2ikf(\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(\cos\theta)(-i)^l e^{i\delta_l}, \\
\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)(-1)^l &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(\cos\theta)(i)^l e^{-i\delta_l},
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Legendre-Polynomen $P_l(\cos\theta)$ sind unabhängig. Deswegen erhalten wir aus der zweiten Gleichung in (3.9)

$$C_l = (2l+1)i^l e^{i\delta_l}. \quad (3.10)$$

Wir lösen die erste Gleichung in (3.9) nach $f(\theta)$ und finden damit die Streuamplitude

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)(2l+1)\left[e^{2i\delta_l} - 1\right]. \quad (3.11)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int \mathrm{d}\Omega |f(\theta)|^2 \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\Omega}{4k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)(2l+1)\left[e^{2i\delta_l} - 1\right] P_{l'}(\cos\theta)(2l'+1)\left[e^{-2i\delta_{l'}} - 1\right].
\end{aligned} \quad (3.12)$$

[2]Weil die rechte Seite von Azimutwinkel φ unabhängig ist, benutzen wir die Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ auf die rechte Seite.

Mit Hilfe der Orthogonalität der Legendrepolynome

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}, \tag{3.13}$$

erhalten wir den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \tag{3.14}$$

Wir können jetzt das optisches Theorem anders beweisen. Dazu berechnen wir $\mathrm{Im} f(\theta = 0)$ mithilfe von Gl. (3.11). Wir erhalten

$$\mathrm{Im}[f(0)] = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \cos 2\delta_l) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \tag{3.15}$$

Durch Vergleich von Gl. (3.14) und Gl. (3.15) ergibt sich

$$\mathrm{Im}[f(0)] = \frac{k}{4\pi} \, \sigma. \tag{3.16}$$

Das ist wiederum das optische Theorem für elastischen Streuung.

Wir machen noch eine Bemerkung dazu. Den Wirkungsquerschnitt können wir schreiben als die Summe der Wirkungsquerschnitte für Zustände mit bestimmtem Wert des Drehimpuls

$$\sigma = \sum_l \sigma_l, \quad \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \tag{3.17}$$

Weil $\sin^2 \delta_l < 1$ gilt, sind alle σ_l beschränkt

$$\sigma_l < \frac{4\pi(2l+1)}{k^2}. \tag{3.18}$$