# *Moderne Theoretische Physik III (TP)*

## *Vorlesung 7*

Kirill Melnikov
TTP KIT
May 15, 2024

# 7 Feldtheorie des massenlosen Vektorfelds und des Spin-1/2 Felds

Wir fangen an mit der Diskussion des Spin-1 (oder Vektor-) Felds. Ein wichtiges Beispiel des massenlosen Vektorfelds ist das elektromagnetische Feld. Um elektromagnetisches Feld zu beschreiben, brauchen wir das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{H}$. Diese Felder erfüllen vier Maxwellische Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \quad -\vec{\nabla}\times\vec{H} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Es ist auch bekannt dass elektromagnetisches Feld mit Hilfe eines Viervektors $A^\mu$ beschrieben werden kann; dieser Vektor können wir aus elektrisches Potential $\phi$ und das Vektorpotential $\vec{A}$ erstellen,

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}). \tag{7.2}$$

Aus $\phi$ und $\vec{A}$ berechnen wir dann elektrisches und magnetisches Felder

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi, \quad \vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A}. \tag{7.3}$$

Andererseits, können wir Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ mit Hilfe eines rang-zwei antisymmetrischen Tensors $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, \tag{7.4}$$

beschreiben. Um das zu sehen, benutzen wir die übliche Darstellung der Ableitung nach $x_\mu$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right), \tag{7.5}$$

und finden

$$F^{0i} = \partial_t A^i + \partial_i A^0 = -E^i, \tag{7.6}$$

und

$$F^{ij} = -\partial_i A^j + \partial_j A^i. \tag{7.7}$$

Es loht sich beide Seiten der letzten Gleichung mit Levi-Civita Tensor $\epsilon^{ijk}$ kontrahieren. Wir erhalten dann

$$\epsilon_{kij} F^{ij} = -2\epsilon_{kji}\partial_j A^i = -2\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right]_k = -2H^k. \tag{7.8}$$

Es folgt

$$H^k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij} F^{ij}. \tag{7.9}$$

Maxwellische Gleichungen in Gl.(7.1) können wir so umschreiben dass die Tensor $F^{\mu\nu}$ enthalten. Die Gleichungen in erster Zeile von Gl. (7.1) sind äquivalent zur folgenden Gleichung

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{7.10}$$

Die Gleichungen in zweiter Zeile von Gl. (7.1) folgen aus der Definition von Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ durch $\phi$ und $\vec{A}$. Ähnlich, können wir die Definition von $F^{\mu\nu}$ benutzen um zu zeigen dass folgende Gleichung

$$\epsilon^{\rho\alpha\mu\nu}\partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0, \tag{7.11}$$

gilt, wobei $\epsilon^{\rho\alpha\mu\nu}$ der vier-dimensionale Levi-Civita Tensor ist, welcher mit folgender Bedingung $\epsilon^{0123} = 1$ vollständig definitert ist.

Als nächster Schritt wollen wir zeigen dass dynamische Maxwellische Gleichungen aus Wirkung

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right), \tag{7.12}$$

folgen. Wir berechnen die Variation von $S$ und finden

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4 x \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}\right), \tag{7.13}$$

wobei

$$\delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu. \tag{7.14}$$

Weil $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, finden wir

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \, (-F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu) = \int \mathrm{d}^4x \, (\partial^\mu F_{\mu\nu}\delta A^\nu) \, . \tag{7.15}$$

Wie üblich, haben wir in dem letzen Schritt partiell integriert und mögliche Beiträge von $x \to \infty$ vernachlässigt. Weil $\delta S$ für beliebige $\delta A^\mu$ eine Null sein soll, folgen aus Gl. (7.15) die Maxwellische Gleichungen in Gl. (7.10).

Die Theorie, welche wir mit der Wirkung in Gl. (7.12) beschreiben, ist etwas seltsam. In der Tat, obwohl wir $A^\mu$ als "Feld" bezeichnen und als dynamische Variable benutzen, hängen die Wirkung $S$ und die Maxwellische Gleichungen *nur* von $F^{\mu\nu}$ ab. Das Verhältniss zwischen $F^{\mu\nu}$ und $A^\mu$ ist nicht invertiebär sodass es ist nicht möglich $A^\mu$ aus $F^{\mu\nu}$ einzigartig zu rekonstruieren.

In der Tat, aus der Definition von $F^{\mu\nu}$ in Gl. (7.4) folgt es dass

$$F^{\mu\nu}[A_1] = F^{\mu\nu}[A_2], \tag{7.16}$$

falls

$$A_1^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi, \tag{7.17}$$

wobei $\chi$ eine beliebige Funktion ist. Diese Eigenschaft der Theorie des massenlosen Vektorfelds heißt *E*ichinvariainz. Eichinvarianz spielt eine sehr wichtige Rolle in heutiger Beschreibung von fundamentalen Wechselwirkungen, und wir werden sie im laufe dieses Semesters weiter diskutieren.

Die Geburt der Quantenmechanik ist mit der Interpretation der elektromagnetischen Wellen als massenlose Teilchen (Photonen) verbunden. Die Massenlosenheit der Photonen folgt aus der Tatsache dass elektromagnetische Wellen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, wie aus Maxwellischen Gleichungen folgt.

Wir versuchen jetz die Wirkung in Gl. (7.1) zu erweitern um die Theorie von massiven Photonen zu bekommen. Aus der Geschichte mit Skalarfeld wissen wir, wie ein Mass-term in die Lagrangedichte eingeführt werden soll. Ähnlich, schreiben wir

$$S = \int \mathrm{d}^4x \, \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right) . \tag{7.18}$$

Wir berechnen die Variation und erhalten

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \, \left(\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu\right) \delta A^\nu. \tag{7.19}$$

Die Feldgleichung folgt

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu = 0. \tag{7.20}$$

Diese Gleichung hat eine wichtige Folge. Um sie zu sehen, kontrahieren wir beide Seiten der Gl. (7.20) mit $\partial^\nu$, benutzen die Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$,

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0, \tag{7.21}$$

und erhalten

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{7.22}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir Gl. (7.20) vereinfachen. Wir erhalten

$$\left(\partial^\nu \partial_\nu + m^2\right) A^\mu = 0. \tag{7.23}$$

Die obige Gleichungen sind unanhängige Klein-Gordon Gleichungen für vier Komponenten des Vektorpotentials $A^\mu$, mit der Einschränkung von Gl. (7.22). Die Lösungen der Klein-Gordon Gleichungen haben wir diskutiert und haben gesehen dass der Parameter $m$ die Rolle der Masse spielt. Dass heißt dass die Theorie in Gl. (7.18) das Vektorfeld der "massiven Photonen" beschreibt.

Relativistische Elektronen beschreiben wir mit Hilfe der Diracschen Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{7.24}$$

Falls wir $\psi$ in Diracscher Gleichung nicht als quantenmechanishe Wellenfunktion sondern als Feld betrachten, sollen wir Diracsche Gleichung als die Bewegungsgleichung des Elekntronsfelds betrachten. Diese Bewegungsgleichung soll aus der Wirking folgen. Wir schreiben diese Wirkung als

$$S_D = \int \mathrm{d}^4x \, \bar{\psi}(x) \, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \, \psi(x), \tag{7.25}$$

wobei $\bar{\psi}$ lautet

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0. \tag{7.26}$$

Weil das Feld $\psi$ komplex ist, sollen wir $\psi$ und $\bar{\psi}$ als unabhändige Variablen betrachten um die Bewegungsgleichungen herzuleiten. In diesem Hinsicht ist $S_D$ eigenartig weil sie linear in $\bar{\psi}$ ist. Dass macht die Berechnung der Variation trivial. Wir erhalten

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0. \tag{7.27}$$

Um die Konsistenz dieses Ergebniss zu checken, können wir die Gleichung für $\bar{\psi}$ aus Gl. (7.27) und aus der Wirkung $S_D$ bekommen. Diese Gleichungen sollen selbstverständlich identisch sein.

Als erster Schritt, berechnen wir die Hermitische Konjugation der Gl. (7.27) und erhalten

$$\psi^+ \left(-i(\gamma^\mu)^+ \overleftarrow{\partial}_\mu - m\right) = 0. \tag{7.28}$$

Weil

$$\gamma_\mu^+ = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0, \tag{7.29}$$

und $\gamma_0^2 = 1$ ist, können wir Gl. (7.28) so umschreiben

$$0 = \psi^+ \gamma_0^2 \left(-i(\gamma^\mu)^+ \overleftarrow{\partial}_\mu - m\right)\gamma_0 = -\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\right). \tag{7.30}$$

Die Gleichung für $\bar{\psi}$ folgt

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0. \tag{7.31}$$

Ähnliche Gleichung erhalten wir aus Diracscher Wirkung Gl. (7.25) in dem wir die Variation von $S_D$ nach $\psi$ berechnen. Wir finden

$$\begin{aligned} \delta S_D &= \int \mathrm{d}^4x\, \bar{\psi}(x)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\delta\psi(x) \\ &= \int \mathrm{d}^4x\, \bar{\psi}(x)\left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m\right)\delta\psi(x), \end{aligned} \tag{7.32}$$

wobei in dem letzen Schritt wir partiell integriert haben. Aus der Forderung $\delta S_D = 0$, finden wir die Bewegungsgleichung für $\bar{\psi}$; sie ist identisch zur Gl. (7.31). Diracsche Wirking $S_D$ in Gl. (7.25) ist Lorentz-invariant.