Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 8

Kirill Melnikov
TTP KIT
May 29, 2024

8 Kontinuerliche Symmetrien in Feldtheorie

Symmetrien spielen in Physik eine wichtige Rolle weil sie uns erlauben die "Bewegungsintegrale" identifizieren. "Bewegungsintegrale" sind dynamische Größe, die zeitunabhängig sind und, deswegen, sich nicht ändern. Viele Bewegungsintegrale sind aus klassischer Mechanik, Elektrodynamik und Quatenmechanik bekannt, zum Beispiel die Energie, die elektrische Ladung, der Impuls, der Bahndrehimpuls, der Drehimpuls u.s.w. In dieser Vorlesung wollen wir diskutieren wie die Symmetrien in Feldtheorie erscheinen und wie sie benutzt wurden.

Als erster Schritt errineren wir uns an der Tatsache dass Feldtheorie und Mechanik eng verbunden sind. Wir versuchen dann die Diskussion von Symmetrien in Mechanik an der Feldtheorie zu ubertragen. In Mechanik, finden wir die Bewegunsintegrale in dem wir nach Koordinatentransformationen suchen welche die Form der Wirkung nicht ändern (wir sagen dass die Wirkung invariant bleibt). In Feldtheorie, *Felder* spielen die Rolle der Koordinaten in Mechanik so wir sollen nach der Transformationen von Felder suchen welche die Form der Wirkung nicht andern.

Um diese Diskussion zu konkretisieren, betrachten wir die Feldtheorie des skalares Felds welche mit der Wirkung

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{8.1}$$

spezifiziert wurde, und machen eine Feldtransformation

$$\phi(x) = f(\tilde{\phi}(x)), \tag{8.2}$$

wobei f eine Funktion des neuen Felds $\tilde{\phi}$ ist. Nach dieser Transformation, erhalten wir

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \mathcal{L}_1(\tilde{\phi}(x), \partial_\mu \tilde{\phi}(x)). \tag{8.3}$$

Im allgemein, sind die Funktionen $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_1$ zwei verschiedene Funktionen der Felder. In diesem Fall, können wir $\mathcal{L}_1$ benutzen um Bewegunsgleichungen für $\tilde{\phi}$ zu erhalten. Diese Gleichungen werden keinen offensichtlichen Zusammenhang mit Bewegungsgleichungen für $\tilde{\phi}$ haben. Dann, ist die Transformation in Gl. (8.5) legitim aber nutzlos.

Allerdings, stellen wir uns vor dass es folgendes Verhältnis zwischen $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_1$ gibt

$$\mathcal{L}_1(\tilde{\phi}, \partial_\mu \tilde{\phi}) = \mathcal{L}(\tilde{\phi}, \partial_\mu \tilde{\phi}) + \partial_\mu K^\mu(\tilde{\phi}). \tag{8.4}$$

Für Bewegungsgleichungen, spielt der Term mit der Ableitung, $\partial_\mu K^\mu(\tilde{\phi})$, keine Rolle. Das heißt dass die Bewegungsgleichungen für Felder ϕ and $\tilde{\phi}$ *identisch sind*. Die Feldtransofrmationen welche Gl. (8.4) erfüllen, nennen wir *die Symmetrien* der gegebenen Feldtheorie.

Um zu sehen warum Gl. (8.4) wichtig ist. nehmen wir an dass in einer Feldtheorie wurde die Transformation gefunden, welcher Gl. (8.4) erfüllt. Wir betrachten dann die infinitesimale Version dieser Transformation und schreiben

$$\phi = \tilde{\phi} + \lambda \Delta\tilde{\phi} + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{8.5}$$

Der Parameter λ parametrisiert wie stark sich die Transformation von "Indentität-Transformation" unterscheidet.

Wir setzen Gl. (8.5) in Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ein und entwickeln in λ; wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) &= \mathcal{L}(\tilde{\phi} + \Delta\tilde{\phi}, \partial_\mu\tilde{\phi} + \partial_\mu\Delta\tilde{\phi}) \\ &= \mathcal{L}(\tilde{\phi}, \partial_\mu\tilde{\phi}) + \lambda\, \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\tilde{\phi}}\Delta\tilde{\phi} + \lambda\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial^\mu\tilde{\phi}]}\partial^\mu\Delta\tilde{\phi} + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Wir schreiben die Ableitung in drittem Term auf der rechten Seite um und erhalten

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}(\tilde{\phi}, \partial_\mu\tilde{\phi}) \\ &+ \lambda\Delta\tilde{\phi}\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\tilde{\phi}} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial^\mu\tilde{\phi}]}\right)\right] + \lambda\partial^\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial^\mu\tilde{\phi}]}\Delta\tilde{\phi}\right] + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet falls $\tilde{\phi}$ die Bewegungsgleichungen erfüllt. Dann, Gl. (8.4) zufolge, ist die Differenz zwischen $\mathcal{L}$ welche mit ϕ and $\tilde{\phi}$ Felder berechnet wurde, gleich $\partial_\mu K^\mu$. Wir erhalten dann

$$\partial_\mu K^\mu = \lambda\partial^\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial^\mu\tilde{\phi}]}\Delta\tilde{\phi}\right]. \tag{8.8}$$

Wir können diese Gleichung so schreiben

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{8.9}$$

wobei der Strom J^μ lautet

$$J^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial^\mu\phi]}\Delta\phi - K^\mu. \tag{8.10}$$

Gl. (8.9) nennen wir die Stromerhaltungsgleichung.

Der Zusammenhang zwischen die Symmetrie der Wirkung und die Existenz des erhaltenden Stroms Gln. (8.9,8.10) ist die Kernaussage die so-genannten Noether-Theorem. Der erhaltende Strom J^μ nennt man oft der Noether-Strom.

Wir diskutieren ein paar Beispiele. Als erstens, betrachten wir die Lagrangedichte eines masselosen Felds

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi. \tag{8.11}$$

In diesem Fall, ändert die Transformation $\phi = \tilde{\phi} + a$, wo a eine Konstante ist, die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ nicht. Es folgt dass $K^\mu = 0$ ist. Für infinitesimalte Transformation, nehmen wir $a = \lambda$; dann ist die Variation des Felds $\Delta\phi = 1$ und wir finden

$$J^\mu = \partial^\mu\phi. \tag{8.12}$$

Die Erhaltung dieses Stroms

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu\partial^\mu\phi = 0, \tag{8.13}$$

ist offensichtlich weil Gl. (8.13) die Bewegungsgleichung für das Feld ϕ ist.

Für ein anderes Beispiel, betrachten wir die Theorie von *zwei* identischen Felder welche mit einander wechselwirken. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(\phi_1,\phi_2) = \frac{\partial_\mu\phi_1\,\partial^\mu\phi_1}{2} + \frac{\partial_\mu\phi_2\,\partial^\mu\phi_2}{2} - \frac{m^2\,(\phi_1^2+\phi_2^2)}{2} - V(\phi_1^2+\phi_2^2), \tag{8.14}$$

wobei V eine beliebige Funktion von $\phi_1^2+\phi_2^2$ ist. Die freie ($V=0$) Version dieser Theorie haben wir in Vorlesung 6 diskutiert.

Die Lagrangedichte in Gl. (8.14) ändert sich nicht falls wir statt $\phi_{1,2}$ Felder $\tilde{\phi}_{1,2}$ benutzen, wobei

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \cos\theta\,\tilde{\phi}_1 + \sin\theta\,\tilde{\phi}_2, \\ \phi_2 &= -\sin\theta\,\tilde{\phi}_1 + \cos\theta\,\tilde{\phi}_2. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Die infinitesimale ($\theta \to 0$) Version dieser Transformationen lautet

$$\phi_1 = \tilde{\phi}_1 + \theta\tilde{\phi}_2, \quad \phi_2 = \tilde{\phi}_2 - \theta\tilde{\phi}_1, \tag{8.16}$$

sodass

$$\Delta\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2, \quad \Delta\tilde{\phi}_2 = -\tilde{\phi}_1. \tag{8.17}$$

wo wir θ mit λ identifiziert haben.

Die Lagrangedichte ist invariant; deswegen ist $K^\mu = 0$. Es folgt dass der erhaltende Strom lautet

$$J^\mu = \sum_{i=1}^{2} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\phi_i}\Delta\phi_i = (\partial^\mu\phi_1)\,\phi_2 - (\partial^\mu\phi_2)\,\phi_1. \tag{8.18}$$

Es ist einfach die Erhaltung dieses Stroms mit Hilfe von Bewegunsgleichungen zu beweisen.

Es ist nutzlich die Theorie in Gl. (8.14) noch einmal zu diskutieren. Wie in Vorlesung 6 gezeigt wurde, es ist möglich reelle Felder $\phi_{1,2}$ mit komplexen Felder zu ersetzen. Diese Felder nennen wir ϕ and ϕ^* und schreiben

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}. \tag{8.19}$$

Wir schreiben die Lagrangedichte in Gl. (8.14) durch ϕ and ϕ^* um und erhalten

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* - V(2\phi\phi^*). \tag{8.20}$$

Die obige Lagrangedichte hangt nur von Produkt von ϕ und ϕ^* ab. Deswegen ändert sich die Lagrangedichte nicht falls wir die Phasen von ϕ und ϕ^* so modifizieren

$$\phi = e^{i\lambda}\tilde{\phi}, \quad \phi^* = e^{-i\lambda}\tilde{\phi}^*. \tag{8.21}$$

Die infinitisemale Version dieser Transformation ist

$$\Delta\tilde{\phi} = i\tilde{\phi}, \quad \Delta\tilde{\phi}^* = -i\tilde{\phi}^*. \tag{8.22}$$

Mit Hilfe dieser Formeln, können wir den erhaltenden Strom schreiben

$$J_\mu = \phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\,\phi. \tag{8.23}$$

Die Symmetrien der Lagrangedichte in Gl. ((8.14) welche wir gerade diskutiert haben, sind $O(2)$ (falls wir mit reellen Felder arbeiten) oder $U(1)$ (falls wir mit komplexen Felder arbeiten). Die Namen $O(2)$ and $U(1)$ sind die übliche Namen für die einfachste kontinuerliche Symmetrie-Gruppen.

Wir können auch Feldtheorien konstruieren welche unter andere (komplizierte) Symmetrietransformationen invariant sind, z.B. unter $U(2)$. Die Elemente die Gruppe $U(2)$ können wir uns als z.B. eine Menge von 2×2 unitäre Matrizen vorstellen welche in zwei-dimensionale Vektorraum mit komplexe Vektoren (Spinoren) agieren. Nehmen wir zwei Vektoren aus diesem Raum ξ und η. Dann gilt

$$\eta^+ \cdot \xi = \eta_1^+ \cdot \xi_1, \tag{8.24}$$

wobei $\xi_1 = U\xi$ und $\eta_1 = U\eta$, weil $U^+U = 1$ ist. Unser Ziel ist es, die Lagrangedichte zu konstruieren welche ünter solche Transformation invariant ist.

Das Feld soll ein komplexe zwei-komponentige Spinor-Feld sein,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}. \tag{8.25}$$

Mit $U(2)$-Transformation, können wir dieses Feld in ein anderen Feld transformieren

$$\Phi_1 = U\Phi. \tag{8.26}$$

Die Matrix U hier ist eine unitäre Matrize, $U^+U = 1$. Die Lagrangedichte soll nur von Skalarprodukt $\Phi^+\Phi$ und ähnliche Größen abhängen. Dann schreiben wir die Wirkung

$$S = \int \mathrm{d}^4x \, \left(\partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^+ \Phi - V(\Phi^+\Phi) \right), \tag{8.27}$$

welche offensichtlich invariant ist. Die Wirkung S beschreibt eine ganze Menge von Theorien weil die Funkton V bielibig ist.

Jede unitäre Matrix U können wir so schreiben

$$U = e^{i\alpha} \, U_S, \tag{8.28}$$

wobei α reel ist und

$$\det U_s = 1. \tag{8.29}$$

Matematisch, sagen wir dass eine $U(2)$-Transformation als Produkt einer $U(1)$-Transformation ($e^{i\alpha}$) und einer $SU(2)$-Transformation immer dargestellt werden kann. Infinitesimale $U(1)$-Transformationen haben ein Symmetrie-Generator und infinitesimale $SU(2)$-Transformation drei. Das bedeutet dass es vier unabhängige Symmetrie-Transformation und, dementsprechend, vier Noether-Ströme in dieser Theorie gibt. Um dass zu sehen, schreiben wir eine infinitesimale transformation als

$$U \approx 1 + i\alpha + i\theta_a T^a, \tag{8.30}$$

wobei generatoren $SU(2)$-Transformationen T^a als Pauli-Matrizen geschrieben werded kann

$$T^a = \frac{\sigma_a}{2}. \tag{8.31}$$

Dann gilt

$$\Delta\Phi = i\alpha\Phi + i\theta_a T^a \Phi. \tag{8.32}$$

Für $\Delta\Phi^+$ gilt dann

$$\Delta\Phi = -i\alpha\Phi^+ - i\Phi^+\theta_a T^a \tag{8.33}$$

Mit Hilfe von diesen Formel und Noether-Theorem, berechnen wir vier erhaltende Ströme

$$\begin{aligned} J_\mu &= \Phi^+\partial^\mu\Phi - (\partial_\mu\Phi^+)\Phi, && U(1) - \text{Strom}, \\ J_\mu^a &= \partial_\mu\Phi^+ T^a\Phi - \Phi^+ T^a \partial^\mu\Phi, && SU(2) - \text{ Ströme}. \end{aligned} \tag{8.34}$$

Als letzes Beispiel betrachten wir eine Koordinaten-Transformation

$$x^\mu = x_1^\mu + \lambda a^\mu, \tag{8.35}$$

wobei a^μ x-unabhängige Viervektor und λ ein Parameter sind.

Die Transformation in Gl. (8.35) ist, an sich, keine Feld-Transformation; allerdings, es ist möglich sie auf dieser Weise zu interpretieren und Noether-Theorem anzuwenden. Wir schreiben

$$\phi(x) = \phi(x_1 + \lambda a) = \tilde{\phi}(x_1). \tag{8.36}$$

Es folgt

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) - \lambda a^\mu \partial_\mu \tilde{\phi}(x), \tag{8.37}$$

sodass

$$\Delta\tilde{\phi}(x) = -a^\mu \partial_\mu \tilde{\phi}. \tag{8.38}$$

Gl. (8.36) zufolge, gilt

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \mathcal{L}(\tilde{\phi}(x_1), \partial_\mu \tilde{\phi}(x_1)) \tag{8.39}$$

Es ist wichtig zu verstehen dass aus Gl. (8.39) keine Aussage über die Invarianz der Lagrangedichte gemacht werden kann weil die Lagrangendichten in zwei *unterschiedliche* Raumzeit-Punkten vergliechen wurden. Für Noether-Theorem sollen wir die an gleichem Punkt vergleichen. Weil

$$\mathcal{L}(x_1) = \mathcal{L}(x - \lambda a) = \mathcal{L}(x) - \lambda a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}, \tag{8.40}$$

stellen wir fest dass

$$K^\mu = -a^\mu \ \mathcal{L}. \tag{8.41}$$

Mit Hilfe von Gl. (8.10) und Gl. (8.38) können wir schließlich den erhaltenden Strom erstellen

$$J^\mu = -a^\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial^\mu \phi} \partial_\nu \phi + a^\mu \mathcal{L}. \tag{8.42}$$

Weil a^μ beliebige Viervektor ist, führen wir ein rang-zwei Tensor $T^{\mu\nu}$ ein um die erhaltende Größe vollständig zu beschreiben. Der (symmetrische) Tensor lautet

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \ \partial_\mu \phi} \ \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \tag{8.43}$$

Wir nennen $T^{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor. Für Lagrangefunktionen mit kanonischer kinetischer Energie-Term ist $T^{\mu\nu}$ symmetrisch. Das bedeutet dass $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ zehn unabhängige Komponenten hat. Wichtige Komponenten sind T^{00} - die Energie-Dichte und T^{0i} – die Impuls-Dichte. Die Erhaltungsgleichung ist dann

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{8.44}$$

Erhaltende Ströme sind wichtig weil aus dieser Ströme die Bewegunsintegrale folgen. Um das zu sehen, nehmen wir erhaltenden Strom J^μ, und führen folgende Große ein

$$Q(t) = \int \mathrm{d}^3\vec{x} \ \ J^0(t, \vec{x}). \tag{8.45}$$

Diese Große nennt man *die Ladung*.[1] Wir wollen zeigen dass $Q(t)$ *zeit-unabhängig* ist. Um das zu checken, berechnen wir die Ableitung von $Q(t)$ nach t und benutzen Gl. (8.9). Wir finden dann

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \frac{\partial J_0(t,\vec{x})}{\partial t}. = -\int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\oint_{|\vec{x}|=\infty} \mathrm{d}^2\vec{S}\ \cdot\vec{J} = 0, \quad (8.46)$$

wobei wir die Annahme gemacht haben dass $\vec{J}(t,\vec{x})$ bei $|\vec{x}| = \infty$ schnell verschindet und wir das Integral bei $|\vec{x}| \to \infty$ vernachlässigt haben. Gl. (8.46) bedeutet dass $Q(t)$ zeit-unabhängig ist und sich nicht ändern kann.

Zum Beispiel, aus der Gleichung für den Energie-Impuls-Tensor

$$\partial_\mu T^{0\mu} = 0, \quad (8.47)$$

folgt es dass

$$E = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\ \ T^{00}(t,\vec{x}), \quad (8.48)$$

zeit-unabhängig ist. Diese Grösse ist die gesamte Energie des Felds und T^{00} die Energiedichte ist.

Für Wirkung S_D in Gl. (**??**) welche relativistische Fermionen beschreibt, gibt es auch $U(1)$ Symmetrie. In der Tat, es ist einfach zu sehen dass S_D unter folgenen Transformationen

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\alpha}, \quad (8.49)$$

invariant bleibt. Der erhaltende Strom ist dann

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (8.50)$$

[1]Die Ladung in diesem Fall muss nicht die elektrische Ladung sein.