Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 9

Kirill Melnikov
TTP KIT
June 5, 2024

9 Eichinvarianz: abelischer Fall, elektromagnetische Wechselwirkung als Beispiel

Wir betrachten komplexes Skalarfeld ϕ, wie in Vorlesung 8. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - m^2 \phi^+ \phi - V(\phi^+ \phi). \tag{9.1}$$

Diese Lagrangedichte bleibt unter folgenden Feldtransformationen

$$\phi \to e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^+ \to e^{-i\alpha} \phi^+, \tag{9.2}$$

invariant. Der Parameter α ist beliebig. Die Folge dieser Invarianz ist die Erhaltung folgendes Stroms

$$J^\mu = i(\phi^+ \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^+)\phi), \tag{9.3}$$

und die Zeitunabhängigkeit folgener Ladung

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x \ J^0(t, \vec{x}). \tag{9.4}$$

Wir werden sehen dass diese Ladung mit elektrischer Ladung identifiziert werden kann.

Die Symmetrie der Lagrangedichte, welche Gl.(9.2) entspricht, bedeutet dass die Phase des Felds ϕ beliebig ist und, deswegen, spielt für die Dynamik keine Rolle. Es ist aber wichtig dass diese Phase überall in Raumzeit gleich sein soll.

Es ist möglich zu sagen dass diese Bedingung nicht optimal ist, weil sie im Wiederspruch mit Lokalität erscheint. Dann stellt sich die Frage ob wie diese Symmetrie lokal definieren kann, und was dass für die Lagrangedichte in Gl. (9.1) bedeutet.

Um diese Frage zu untersuchen, führen wir die folgende Transformation

$$\phi \to e^{i\alpha(x)} \phi, \tag{9.5}$$

in der Lagrangedichte Eq. (9.1) durch. Die Phase $\alpha(x)$ in Gl. (9.5) ist eine beliebige x-abhängige Funktion. Der Term $\phi^+\phi$ in Gl. (9.1) bleibt invariant. Der Term mit Ableitung $\partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi$ ändert sich wie folgt

$$\partial_\mu \phi \to \partial_\mu e^{i\alpha(x)} \phi = e^{i\alpha(x)} \left[\partial_\mu + i\left(\partial_\mu \alpha\right)\right] \phi. \tag{9.6}$$

Falls die Ableitung von α oder α in der Lagrangedichte erscheint, ist die Transformation Gl. (9.5) keine Symmetrie der Theorie.

Allerdings, es ist möglich die Theorie so zu erweitern, dass sie unter x-abhängigen Transformationen invariant bleibt. Dazu muss man ein Vektorfeld in die Theorie einführen. Um zu sehen wir das funktioniert, stellen wir uns vor dass wir in Gl. (9.1) normale Ableitungen mit so gennanten *kovarianten Ableitungen* ersetzen

$$\partial^\mu \phi \to D^\mu \phi, \tag{9.7}$$

wobei

$$D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu(x), \tag{9.8}$$

und A_μ ein neues Feld ist. Die neue Lagrangefunktionen lautet

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^+ (D^\mu \phi) - m^2 \phi^+ \phi - V(\phi^+ \phi). \tag{9.9}$$

Nach der Transformation $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$, erhlaten wir

$$D^\mu \phi \to e^{i\alpha(x)} \left[\partial^\mu - ig(A^\mu - g^{-1}\partial^\mu \alpha)\right] \phi(x). \tag{9.10}$$

Falls wir das Felds A^μ auch transformieren

$$A^\mu \to A^\mu + g^{-1}\partial^\mu \alpha, \tag{9.11}$$

erhalten wir folgende Transformationregel für die kovariante Ableitung

$$D^\mu \phi \to e^{i\alpha(x)} D^\mu \phi. \tag{9.12}$$

Diese Transformation ist identisch zur Feldtransformation Gl. (9.5) und es folgt dass nach einer gemeinsamen Transformation von ϕ und A^μ die Lagrangefunktion in Gl.(9.9) invariant ist.

Die Forderung dass die Phase des Felds ϕ an jedem Raumzeitpunkt unabhängig gewählt werden kann, macht die einführung eines Vektorfelds unvermeindlich, und liegt die Kopplung zwischen ϕ und A^μ fest. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
&(D_\mu \phi)^+ (D^\mu \phi) = \left(\left(\partial^\mu \phi^+\right) + igA^\mu \phi^+\right)(\partial_\mu \phi - igA_\mu \phi) \\
&= \partial^\mu \phi^+ \partial_\mu \phi + igA_\mu(\phi^+ \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi)^+ \phi) + \mathcal{O}(A^2) \\
&= \partial^\mu \phi^+ \partial_\mu \phi + gA_\mu J^\mu + \mathcal{O}(A^2).
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Es folgt dass das massenlose Feld A^μ grundsätzlich mit dem Strom wechselwirkt, welche wir aus "globale" $U(1)$-Symmetrie hergeleitet haben. Mit

Hilfe dieses Stroms, können wir elektrishe Ladung definitiert; ähnlich, kann wir A^μ mit elektromagnetischem Vektorpotential identifizieren.

Um aus A^μ dynamisches Feld zu machen, sollen wir kinetischen Term für A^μ in die Lagrangefunktion einführen; den kennen wir aus unser Diskussion der Elektrodynamik. Wir schreiben dann

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{9.14}$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist. Die gesamte Lagrangefunktion der Eichtheorie eines komplexen skalaren Feld ist dann

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^+ (D^\mu \phi) - m^2 \phi^+ \phi - V(\phi^+ \phi). \tag{9.15}$$

Wir bemerken, dass die Eichsymmetrie den Massen-Term des Vektorfelds $\sim \lambda^2 A_\mu A^\mu$ verbietet, weil er unter Eichtransformationen Gl.(9.15) *nicht invariant ist*.

Es ist möglicht das Feld-Tensor $F_{\mu\nu}$ als Kommutator von zwei kovariante Ableitungen schreiben

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}. \tag{9.16}$$

Weil D_μ unter Eichtransformationen invariant ist, ist $F_{\mu\nu}$ auch invariant.

Als letzter Schritt, diskutieren wir ähnliche Erweiterung der Diracschen Lagrangefunktion. Auch in diesem Fall ersetzen wir die Ableitung mit kovarianter Ableitung

$$D^\mu = \partial^\mu + ie\, A^\mu, \tag{9.17}$$

und erhalten

$$S_D = \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m \right) \psi. \tag{9.18}$$

Die Kopplungskonstante e ist die elektrische Ladungs des Elektrons. Diese Lagrangedichte bleibt unter folgenden Transformationen

$$\psi(x) = e^{i\alpha} \psi_1(x), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_1(x) e^{-i\alpha}, \quad A^\mu = A_1^\mu - e^{-1} \partial^\mu \alpha(x), \tag{9.19}$$

invariant.

9