

Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 10

Kirill Melnikov
TTP KIT
June 14, 2024

10 Nichtabelsche Eichtheorien

In dieser Vorlesung, betrachten wir eine Theorie, welche zwei Fermionen gleicher Massen beschreibt. Die Lagrangedichte lautet

$$L = \bar{\psi}_a(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi_a + \bar{\psi}_b(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi_b. \quad (10.1)$$

Um diese Formel kompakter zu machen, schreiben wir zwei Fermion-Felder als ein neues Feld Ψ

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_a(x) \\ \psi_b(x) \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Wir bemerken dass $\Psi(x)$ acht Komponenten hat, weil $\psi_{a,b}$ vier-komponentige Spinoren sind. Dann schreiben wir

$$L = \bar{\Psi}(x) \begin{pmatrix} i\gamma_\mu\partial^\mu - m & 0 \\ 0 & i\gamma_\mu\partial^\mu - m \end{pmatrix} \Psi(x), \quad (10.3)$$

wobei jeder Term in der Matrize in der obigen Formel eine 4×4 Matrize ist. Um Gl. (10.3) zu vereinfachen, schreiben wir sie als

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i\gamma_\mu\partial^\mu - m) \Psi(x). \quad (10.4)$$

Die Lagrangedichte Gl. (10.3) ist unter $U(2)$ -Transformationen invariant; wir werden uns auf $SU(2)$ Teil der $U(2)$ Transformationen konzentrieren. Dann,

$$\Psi(x) = \hat{U}\Psi_1(x), \quad (10.5)$$

wobei U eine x^μ - unabhängige $SU(2)$ Matrize ist,

$$U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1. \quad (10.6)$$

Die Transformation in Gl. (10.5) bedeutet dass es egal sein soll ob wir in der Lagrangedichte Gl. (10.1) $\psi_{a,b}$ oder ihre lineare Kombinationen benutzen; die Lagrangedichte sieht immer identisch aus.

Eine $SU(2)$ Matrize U können wir so schreiben

$$U = e^{i \sum_{a=1}^3 \alpha_a \tau_a}, \quad (10.7)$$

wobei $\alpha_{1,2,3}$ reelle Parameter und $\tau_{1,2,3}$ drei Generatoren der $SU(2)$ -Algebra sind. Diese Generatoren erfüllen Vertauschungsrelationen

$$[\tau^a, \tau^b] = i\epsilon^{abc}\tau^c, \quad (10.8)$$

wobei ϵ^{abc} der Levi-Civita tensor ist. In unserem Fall, können wir τ^a durch Pauli-Matrizen schreiben

$$\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}. \quad (10.9)$$

Als nächster Schritt, wollen wir die Symmetrie-Transformation in Gl. (10.5) x -abhängig machen. Ähnlich zum $U(1)$ -Fall, welches wir in vorheriger Vorlesung diskutiert haben, sollen wir dann ein Vektorfeld in der Lagrangedichte einführen um die Änderungen in Lagrangedichte nach x -abhängigen Transformationen von Ψ zu kompensieren. Wir schreiben

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\Psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m)\Psi(x), \quad (10.10)$$

wobei

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_s \hat{A}^\mu(x). \quad (10.11)$$

und $\hat{A}^\mu$ muss eine 2×2 Matrize sein.

Wir fordern dass die Lagrangedichte in Eq. (10.10) nach Transformationen

$$\Psi(x) = U(x)\Psi_1(x), \quad A(x) \rightarrow A_1(x), \quad (10.12)$$

invariant bleibt

$$L[\bar{\Psi}, \Psi, \hat{A}_\mu] = L[\bar{\Psi}_1, \Psi_1, \hat{A}_{1,\mu}]. \quad (10.13)$$

Dann finden wir dass um diese Gleichung zu erfüllen, soll das Feld $\hat{A}_\mu(x)$ sich so transformieren

$$A^\mu(x) = U(x) A_1^\mu(x) U^+(x) - \frac{i}{g_s}(\partial^\mu U)U^+. \quad (10.14)$$

Wie wir schon erwähnt haben, ist das Feld $\hat{A}^\mu(x)$ eine 2×2 Matrize. Wir zeigen jetzt dass falls diese Matrize eine lineare Kombination von drei $\vec{\tau}$ -Matrizen mit reellen Koeffizienten ist,¹

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{a=1}^3 A_\mu^a(x) \tau^a, \quad (10.15)$$

bleibt diese Eigenschaft nach Eichtransformation erhalten. Gl. (10.15) bedeutet dass im Fall von $SU(2)$ -Symmetrie, gibt es *drei* unabhängige A_μ^a -Felder. Für eine $SU(N)$ Eichtheorie, ist diese Zahl $N^2 - 1$.

Um die obige Aussage zu beweisen, betrachten wir zuerst infinitesimale Eichtransformationen

$$U(x) \approx 1 + i \sum_{a=1}^3 \epsilon^a(x) \tau^a. \quad (10.16)$$

Mit Hilfe von Gl. (10.14) finden wir

$$\hat{A}_{1,\mu} \approx \hat{A}_\mu - i \sum_{a=1}^3 \epsilon^a [\tau^a, \hat{A}_\mu] - \frac{1}{g_s} \sum_{a=1}^3 (\partial_\mu \epsilon^a) \tau^a + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (10.17)$$

Dann, weil

$$[\tau^a, \tau^b] = i f^{abc} \tau^c, \quad (10.18)$$

kommen wir zum Schluß dass – falls ursprüngliches Feld $\hat{A}^\mu$ zur Lie-Algebra gehörte – gehört A_1^μ auch zur Lie-Algebra. Obwohl wir nur infinitesimale Transformationen untersucht haben, es ist einfach den obigen Beweis auf beliebige $SU(2)$ -Transformationen erweitern. Es folgt dass Gl. (10.15) immer gültig ist.

Um komplette Theorie aufzustellen, brauchen wir kinetischen Term für das Feld A_μ^a . Dieser Term muss invariant unter $SU(2)$ Eichtransformationen sein. In dem abelischen Fall haben wir gesehen dass wir kinetischen Term aus Feld-Tensor $F_{\mu\nu}$ konstruieren kann und dass $F_{\mu\nu}$ als Kommutator von zwei kovarianten Ableitungen schreiben kann $F_{\mu\nu} \sim [D_\mu, D_\nu]$. Das Gleiche können wir im nichtabelischen Fall auch tun. Wir schreiben dann

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{g_s} [D_\mu, D_\nu]. \quad (10.19)$$

¹Wir sagen dann dass das Feld A^μ zur $SU(2)$ Lie-Algebra gehört.

Aus den Ausdruck für D_μ in Gl. (10.11) folgt

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig_s [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]. \quad (10.20)$$

Dann, mit Hilfe von Gl. (10.15) finden wir

$$[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu] = i \epsilon^{abc} A_\mu^a A_\nu^b \tau^c, \quad (10.21)$$

sodass $\hat{F}_{\mu\nu} = \tau^a F_{\mu\nu}^{(a)}$ wobei

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (10.22)$$

Wir schreiben den kinetischen Term als

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} [\hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu}]. \quad (10.23)$$

Der Vorfaktor haben wir so gewählt dass in dem $g_s \rightarrow 0$ Limit erhalten wir aus Gl. (10.23) drei abelsche kinetische Terme für Felder A_μ^a .²

Um die Eichinvarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{kin}}$ zu beweisen, brauchen wir die Transformationsregeln für $F_{\mu\nu}$ und die kovariante Ableitung. Wir fangen mit der Ableitung an und schreiben

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - ig_s \hat{A}_\mu = \partial_\mu - ig_s \left(U \hat{A}_{1,\mu} U^+ - \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U) U^+ \right) \\ &= U (\partial_\mu - ig_s \hat{A}_{1,\mu}) U^+ = U D_{1,\mu} U^+. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Es folgt dass für den Feld-Tensor $F_{\mu\nu}$ folgende Formel gilt

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U \hat{F}_{\mu\nu} U^+. \quad (10.25)$$

Mit Hilfe dieser Formel ist es einfach die Invarianz kinetisches Terms L_{kin} zu beweisen. Für den Beweis, sollen wir nur $U^+ U = 1$ und die Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen benutzen.

Es ist interessant darauf hinzuweisen dass L_{kin} *alleine* sehr komplizierte Theorie definiert. Um dass zu sehen, stellen wir die Bewegungsgleichungen für Felder in dieser Theorie auf. Wir erhalten

$$\partial_\mu F^{a,\mu\nu} - g_s \epsilon^{abc} F^{b,\mu\nu} A_\mu^c = 0. \quad (10.26)$$

²Die Gultigkeit dieser Aussage braucht folgende Normierung der Generatoren $\text{Tr}[\tau^a \tau^b] = 1/2 \delta^{ab}$.

Diese Gleichung können wir dann als Kommutator die kovariante Ableitung und den Feld-Tensor schreiben

$$[D_\mu, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (10.27)$$

Weil

$$F^{\mu\nu} \sim [D^\mu, D^\nu] \quad (10.28)$$

ist, können wir zusätzliche "Maxwellische Gleichungen" sofort konstruieren

$$[D^\alpha, F^{\mu\nu}] + [D^\mu, F^{\nu\alpha}] + [D^\nu, F^{\alpha\mu}] = 0. \quad (10.29)$$

weil diese Gleichungen aus der Definition von $F^{\mu\nu}$ folgen.

Aus Gl. (10.26) folgt es dass nichabelische Gleichungen *nicht linear sind*. Um der Unterschied zu Elektrodynamik besser zu sehen, versuchen wir die Ebenewellen Lösungen zu konstruieren. Es ist einfach zu sehen dass falls das Vektorpotential nur eine $SU(2)$ -Komponente hat, z.b.

$$A_\mu^a(x) = \delta^{a3} f_\mu(x) \quad (10.30)$$

dann gilt

$$[D_\mu, F^{\mu\nu}] \rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu,\nu}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu, \quad (10.31)$$

weil alle $SU(2)$ -Kommutatoren verschwinden. Allerdings, es ist auch klar dass, im Allgemeinen, Funktionen mit komplizierter Abhängigkeit von $SU(2)$ -Indizes keine gültige Lösungen der Wellengleichungen sind, weil der nicht-lineare Term

$$[F^{\mu\nu}, A_\nu] \sim \tau^c \epsilon^{cab} F^{(a),\mu\nu} A_\nu^b, \quad (10.32)$$

nicht verschwindet.

Wir sollen dann nach die Lösungen suchen welche einerseits Ebenewellen sind, und, andererseits der Term in Gl. (10.32) verschwinden lassen. Um solche Lösungen zu konstruieren, betrachten wir eine Welle welche sich in z -Richtung ausbreitet. Wir wählen die Lorentz-Eichung aus. Dann gilt

$$\partial_\mu A^{a,\mu} = 0. \quad (10.33)$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, schreiben wir

$$\begin{aligned} A^{a,0} &= W^{(a)}(x, y, z - t), \quad A^{a,z} = W^{(a)}(x, y, z - t), \\ A^{a,x} &= A^{a,y} = 0. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Die Funktionen $W^{(a)}$ schreiben wir als

$$W^{(a)} = x f^{(a)}(z - t) + y g^{(a)}(z - t). \quad (10.35)$$

Wir berechnen dann den Feld-Tensor

$$\begin{aligned} F^{a,0x} &= \partial_0 A^{a,x} + \partial_x A^{a,0} = \partial_x A^{a,0} = \partial_x W^a = f^{(a)}, \\ F^{a,0y} &= \partial_0 A^{a,y} + \partial_y A^{a,0} = \partial_y A^{a,0} = \partial_y W^a = g^{(a)}, \\ F^{a,0z} &= \partial_0 A^{a,z} + \partial_z A^{a,0} = 0, \\ F^{(a),xy} &= 0, \\ F^{(a),xz} &= -\partial_x A^z + \partial_z A^x = -f^{(a)}, \\ F^{(a),yz} &= -\partial_y A^z + \partial_z A^y = -g^{(a)}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} F^{(a),0\nu} A_\nu^b &= -F^{a,0x} A^{b,x} + F^{a,0y} A^{b,y} + F^{a,0z} A^{b,z} = 0, \\ F^{(a),x\nu} A_\nu^b &= F^{a,x0} A^{b,0} - F^{a,xz} A^{b,z} - f^a W^b + f^a W^b = 0, \\ F^{(a),y\nu} A_\nu^b &= F^{a,y0} A^{b,0} - F^{a,yz} A^{b,z} - g^a W^b + g^a W^b = 0, \\ F^{(a),z\nu} A_\nu^b &= F^{a,z0} A^{b,0} = 0. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Wir haben bewiesen dass für Vektorpotentiale in Gl. (10.34, 10.35) folgende Gleichung

$$F^{a,\mu\nu} A_\nu^b = 0, \quad (10.38)$$

erfüllt ist. Das bedeutet auch dass diese Vektorpotentiale die Wellengleichungen erfüllen und die Ebenewellen-Lösungen darstellen.

Als letztes Teil dieser Vorlesung diskutieren wir nichtabelsche Theorie mit Fermionen. Die Lagrangedichte haben wir in Gl. (10.10). Es ist einfach die Bewegungsgleichungen herzuleiten. Statt Gl. (10.26), erhalten wir

$$\partial_\mu F^{a,\mu\nu} - g_s \epsilon^{abc} F^{b,\mu\nu} A_\mu^c = -g_s J^{a,\mu}, \quad (10.39)$$

wobei der Strom lautet

$$J^{a,\mu} = \bar{\Psi} \tau^a \gamma^\mu \Psi. \quad (10.40)$$

Die Bewegungsgleichung für das Fermion-Feld ist

$$\gamma^\mu D_\mu \Psi = 0. \quad (10.41)$$

Aus Gl. (10.39) können wir erhaltenden Strom konstruieren. Wir schreiben diese Gleichung um

$$\partial_\mu F^{a,\mu\nu} = -g_s J_N^{a,\nu}, \quad (10.42)$$

wobei

$$J_N^{a,\mu} = J^{a,\mu} - \epsilon^{abc} F^{b,\mu\nu} A_\nu^c. \quad (10.43)$$

Dann, weil tensor $F^{a,\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, finden wir aus Gl. (10.42)

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{a,\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu J_N^{a,\mu} = 0. \quad (10.44)$$

Der Strom $J_N^{a,\mu}$ ist erhaltend. Im Gegensatz, ist der Strom $J^{a,\mu}$ *nicht* erhaltend, erfüllt aber folgende Gleichung

$$[D_\mu, J^\mu] = 0, \quad (10.45)$$

wobei

$$J^\mu = \sum_{a=1}^3 \tau^a J^{a,\mu}. \quad (10.46)$$