Moderne Theoretische Physik III (TP)

Vorlesung 11

Kirill Melnikov
TTP KIT
June 13, 2024

11 Spontane Symmetrie-Brechung, Goldstone-Effekt

Wir betrachten Theorie eines Skalarfelds. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (11.1)$$

Die Bewegungsgleichung in dieser Theorie ist dann

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -\lambda \phi^3. \quad (11.2)$$

Falls λ klein ist, können wir die rechte Seite obiger Gleichung nach Null setzen. Dann lösen wir die Gleichung und erhalten Ebene-Wellen als die Lösungen

$$\phi \sim e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\vec{x}}, \quad \text{mit } \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (11.3)$$

Das Verhältnis zwischen ω_k und $\vec{k}$ entspricht das Verhältnis zwischen die Energie und der Impuls eines relativistischen Teilchens wobei m die Rolle der Masse spielt. Später, werden wir sehen dass in dem Moment wir das Feld quantisieren, transformieren sich Ebene-Welle-Lösungen in Wellen-Funktionen von Teilchen mit Energie ω_k , impuls $\vec{k}$ und Masse m . Auf diesem Grund, werden wir in dieser Vorlesung über "Teilchen mit Massen reden" statt über Ebene-Welle-Lösungen klassischer Bewegungsgleichungen. Dann, sagen wir, dass die Theorie mit der Lagrangedichte Gl. (11.1) selbst-wechselwirkende Teilchen mit der Masse m beschreibt.

Die Energie welche im ϕ -Feld gespeichert ist, können wir mit Hilfe dieser Formel berechnen

$$E = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right]. \quad (11.4)$$

Das Minimum der Energie E ist eine Null; diesen Wert erreichen wir mit $\phi = 0$. Das $\phi = 0$ Feld-Konfiguration beschreibt Gleichgewicht dieses Systems; wir nennen das Gleichgewicht "Vakuum" und sagen dann dass in diesem Fall die Energie des Vakuums eine Null ist und das Vakuum-Feld auch einen Null-Wert hat, $\phi = 0$. Die Teilchen mit der Masse m sind dann die Anregungen dieses Vakuums.

Wir untersuchen jetzt was passiert falls wir das Vorzeichen von m^2 in Gl. (11.1) ändern. Wir schreiben

$$m^2 = -\mu^2, \quad (11.5)$$

mit $\mu^2 > 0$. Die Lagrangedichte können wir dann so schreiben

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi), \quad (11.6)$$

wobei

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (11.7)$$

Weil $\mu^2 > 0$ ist, können wir $-\mu^2 \phi^2/2$ nicht als Massen-Term interpretieren weil dann ist die Masse imaginere.

Um aus dieser Situation einen Sinn zu machen, sollen wir die Energie des Systems berechnen und das Vakuum finden. Die Energie lautet

$$E = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{\mu^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right]. \quad (11.8)$$

Das Minimum der Energie des Systems ist das Minimum von $V(\phi)$. Dann,

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_{\min} = \pm \phi_{\text{vac}}, \quad \phi_{\text{vac}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (11.9)$$

Das bedeutet dass die Theorie mit der Lagrangedichte Gl. (11.6) zwei Minima hat. Beide Minima liegen nicht bei $\phi = 0$, sondern bei $\phi = \pm \phi_{\text{vac}}$. Die Energie des Vakuums lautet

$$E_{\text{vac}} = \Omega \left[-\frac{\mu^2}{2} \frac{\mu^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \frac{\mu^4}{\lambda^2} \right] = -\frac{\Omega \mu^4}{2\lambda} < 0, \quad (11.10)$$

wobei $\Omega = \int d^3\vec{x}$ das Volumen des Raums ist.

Normalerweise, befinden sich die physikalische Systeme im der Nähe des Gleichgewichts. D.h. falls wir die Theorie mit Lagrangedichte Eq. (11.6) als klassische Theorie interpretieren, sollen wir entweder Vakuum mit $\phi = +\phi_{\text{vac}}$ oder $\phi = -\phi_{\text{vac}}$ auswählen. Diese zwei Vakua wechselwirken miteinander kaum, weil für einen Übergang viel Energie gebraucht wurde (das Potential bei $\phi = 0$ eine Null ist und die Energie des Vakuums negativ ist.).

In Quantenmechanik ist die Situation anders weil es ein Tunneffekt gibt. Die Folge dieses Effekts ist dass der Grundzustand (das Vakuum) eine symmetrische lineare Kombination von zwei Wellen-Funktionen mit Maxima in

zwei unterschiedlichen Vakua ist. Die Situation in Quantenfeldtheorie ist jedoch ähnlich zur klassischen Physik in dem Sinne dass das Feld wählt *ein* von vielen möglichen Vakua aus; *der Tunneleffekt für Grundzustände existiert in Quantenfeldtheorie nicht*. Wie genau das System ein bestimmtes Vakuum auswählt, können wir nicht beschreiben. Wir nehmen einfach an, dass das passiert ist und wir versuchen dann das System in der Nähe eines von zwei Vakua zu beschreiben.

Wir sagen dass nach der Auswahl des Vakuums eine spontane Symmetriebrechung passiert. Wir meinen damit dass die ursprüngliche Lagrangedichte eine Symmetrie $\phi \rightarrow -\phi$ besitzt. Nach der Vakuumauswahl gibt diese Symmetrie nicht mehr weil das Vakuum selbst nicht symmetrisch ist.

Wir stellen uns vor dass das System das rechte Vakuum ausgewählt hat, sodass im Grundzustand

$$\phi = \phi_{\text{vac}}. \quad (11.11)$$

Um die Phänomene in der Nähe von Grundzustand zu beschreiben, machen wir eine Variablentransformation und führen das neue Feld χ ein, welches so definiert ist

$$\phi(x) = \phi_{\text{vac}} + \chi(x). \quad (11.12)$$

Die neue Lagrangedichte lautet

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi_{\text{vac}}) + \frac{1}{2} (\mu^2 - 3\lambda \phi_{\text{vac}}^2) \chi^2 - \lambda \phi_{\text{vac}} \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4. \quad (11.13)$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, benutzen wir den expliziten Ausdruck für ϕ_{vac} und erhalten

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \lambda \phi_{\text{vac}} \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 - V(\phi_{\text{vac}}), \quad (11.14)$$

wobei $m_\chi^2 = 2\mu^2 > 0$ ist. Das bedeutet dass nach der Symmetriebrechung, die Lagrangedichte in Gl.(11.14) eine Theorie wechselwirkender Teilchen mit positiven Massen m_χ^2 beschreibt, und das Problem des negativen "Massen-Terms" gelöst ist.

Als nächster Schritt, betrachten wir eine ähnliche Theorie aber mit *drei* Felder. Die Lagrangedichte lautet

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}), \quad (11.15)$$

wobei

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (11.16)$$

und

$$V(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) = -\frac{\mu^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + \frac{\lambda}{4} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2. \quad (11.17)$$

Die Lagrangedichte in Gl. (11.15) ist symmetrisch unter Drehungen im (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) Feld-Raum. Formell, das ist die $\mathcal{O}(3)$ -Symmetrie. Falls wir den Vektor $\vec{\phi}$ mit einer 3×3 orthogonalen Matrix rotieren,

$$\vec{\phi} = \hat{R} \vec{\phi}', \quad \hat{R}^T \hat{R} = 1, \quad (11.18)$$

ändert sich die Lagrangedichte nicht

$$L(\vec{\phi}) = L(\vec{\phi}'). \quad (11.19)$$

Weil die potentielle Energie $V(\vec{\phi})$ nur von Betrag des Vektors $\vec{\phi}$ abhängt, können wir frühere Berechnungen benutzen um das Minimum von V zu bestimmen. Wir finden dass das Minimum des Potentials bei

$$\vec{\phi}_{\text{vac}} \cdot \vec{\phi}_{\text{vac}} = \phi_{1,\text{vac}}^2 + \phi_{2,\text{vac}}^2 + \phi_{3,\text{vac}}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (11.20)$$

liegt. Es folgt aus Gl.(11.20) dass es unendlich viele Felder gibt, welche $V(\vec{\phi})$ minimieren. In der Tat, die allgemeinste Form des Vakuumfelds lautet

$$\vec{\phi}_{\text{vac}} = \phi_{\text{vac}} \vec{e}_{\text{vac}}, \quad (11.21)$$

wobei $\phi_{\text{vac}} = \mu/\sqrt{\lambda}$ ist und

$$\vec{e}_{\text{vac}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (11.22)$$

ist, wobei θ und φ beliebig sind.

Im welchem Vakuum unser System nach der Symmetriebrechung sich befindet, wissen wir nicht, aber es befindet sich in einem. Angenommen dass in diesem

Fall $\theta = \theta_v$ und $\varphi = \varphi_v$ sind. Für diese θ und φ bezeichnen wir das Vakuumfeld als $\vec{\phi}_{0,\text{vac}}$ und den Vektor $\vec{e}_{\text{vac}}$ als $\vec{e}_{0,\text{vac}}$.

Wir wollen unsere Theorie in der Nähe von $\vec{\phi}_{0,\text{vac}}$ beschreiben. Dann führen wir das neue Feld $\vec{\chi}$ ein,

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_{0,\text{vac}} + \vec{\chi}, \quad (11.23)$$

und versuchen die Lagrangedichte durch $\vec{\chi}$ umzuschreiben. In diesem Zusammenhang, es ist günstig das Feld $\vec{\chi}$ so zu schreiben

$$\vec{\chi} = h \vec{e}_{0,\text{vac}} + \vec{g}, \quad (11.24)$$

wobei Vektor $\vec{g}$ orthogonal zu $\vec{e}_{0,\text{vac}}$ ist,

$$\vec{g} \cdot \vec{e}_{0,\text{vac}} = 0. \quad (11.25)$$

Es folgt

$$V(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) = V((\phi_{\text{vac}} + h)^2 + \vec{g} \cdot \vec{g}). \quad (11.26)$$

Für das Potential aus Gl.(11.17) erhalten wir

$$V(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) = -\frac{\mu^2}{2} [(\phi_{\text{vac}} + h)^2 + \vec{g}^2] + \frac{\lambda}{4} ((\phi_{\text{vac}} + h)^2 + \vec{g}^2)^2. \quad (11.27)$$

Dieses Potential ist unübersichtlich aber wir können Massen-Terme für Felder h und $\vec{g}$ aus Gl. (11.27) extrahieren. Massen-Terme sind Beiträge zum V welche von h und $\vec{g}$ quadratisch abhängen, also Terme welche so aussehen

$$ah^2 + b\vec{g}^2, \quad (11.28)$$

wobei Koeffizienten a und b konstant sind. Eine einfache Berechnung gibt

$$m_h^2 = 2\mu^2, \quad m_g^2 = 0. \quad (11.29)$$

Das bedeutet dass in diesem Fall, nach der Symmetriebrechung, erhalten wir ein Feld mit eder Masse m_h und zwei massenlose Felder.

Es ist klar was passiert falls wir eine Theorie mit N Felder und die gleiche Funktion $V(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})$ betrachten. Die Berechnung läuft genauso wie bei drei Felder und am Ende haben wir ein Feld mit der Masse $2\mu^2$ und $N - 1$ massenlose Felder.

Es ist einfach zu sehen dass das Erscheinen von masselosen skalaren Teilchen das allgemeine Feature der Theorien mit spontaner Symmetriebrechung ist. Um dass zu zeigen, betrachten wir eine Theorie mit vielen skalaren Felder, welche wir mit dem Potential $V(\vec{\phi})$ beschreiben. Wir nehmen an dass die Theorie unter eine Symmetrie invariant ist; wir beschreiben die infinitesimale Transformationen dieser Symmetrie mit Generatoren T^a , $a = 1..N$.

Eine infinitesimale Symmetrietransformation schreiben wir so

$$\vec{\phi}' = \vec{\phi} + \epsilon_a T^a \vec{\phi}. \quad (11.30)$$

Die potentielle Energie $V(\vec{\phi})$ ist unter Symmetrietransformationen invariant, d.h.

$$V(\vec{\phi} + \epsilon_a T^a \vec{\phi}) = V(\vec{\phi}). \quad (11.31)$$

Wir entwickeln dann die linke Seite dieser Formel in ϵ und behalten lineare Terme. Dann finden wir

$$0 = \epsilon_a \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ik}^a \phi_k. \quad (11.32)$$

Weil Parameter ϵ_a unabhängige Symmetrietransformationen parametrisieren, können wir aus Gl.(11.32) N unabhängige Gleichungen aufstellen

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ik}^a \phi_k, \quad (11.33)$$

d.h. eine Gleichung für jeden Symmetriegenerator.

Wir leiten dann Gl.(11.33) nach ϕ_m ab und erhalten

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_m} T_{ik}^a \phi_k + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{im}^a. \quad (11.34)$$

Es ist zu betonen dass Gl.(11.34) für alle Felder $\vec{\phi}$ gilt. Es ist aber sehr nützlich diese Gleichung für $\vec{\phi} = \vec{\phi}_{\text{vac}}$ zu betrachten.

Dann, weil $\vec{\phi}_{\text{vac}}$ das Potential V minimiert, verschwindet der letzte Term in Gl.(11.34), und wir erhalten

$$0 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_m} \right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_{\text{vac}}} T_{ik}^a \phi_{\text{vac},k}. \quad (11.35)$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung besser zu verstehen, betrachten wir eine Lagrangedichte

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}), \quad (11.36)$$

und stellen uns vor dass die spontane Symmetriebrechung stattfindet. Wir schreiben dann $\vec{\phi} = \vec{\phi}_{\text{vac}} + \vec{\chi}$ und entwickeln das Potential am $\vec{\chi} = 0$. Wir finden

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\chi} \partial^\mu \vec{\chi} - V(\vec{\phi}_{\text{vac}}) - \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Big|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_{\text{vac}}} \chi_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_{\text{vac}}} \chi_i \chi_j + \dots \quad (11.37)$$

Das Potential $V(\vec{\phi})$ hat ein Minimum bei $\vec{\phi} = \vec{\phi}_{\text{vac}}$. Dann gilt

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Big|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_{\text{vac}}} = 0, \quad (11.38)$$

und wir erhalten

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\chi} \partial^\mu \vec{\chi} - V(\vec{\phi}_{\text{vac}}) - \frac{1}{2} m_{ij}^2 \chi_i \chi_j + \dots, \quad (11.39)$$

wobei

$$m_{ij}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_{\text{vac}}}, \quad (11.40)$$

die *Mass-Matrix* ist. Diese Name erhält diese Matrix weil die Eigenwerte dieser Matrix die Massen des Teilchens in dieser Theorie sind.

Normalerweise es ist unmöglich etwas über m_{ij}^2 zu sagen ohne $V(\vec{\phi})$ explizit zu kennen. Jedoch, obwohl wir $V(\vec{\phi})$ nicht kennen, wissen wir dass $V(\vec{\phi})$ Gl. (11.35) erfüllt. Wir schreiben diese Gleichung so um

$$0 = m_{ij}^2 \xi_j^{(a)}, \quad (11.41)$$

wobei

$$\xi^{(a)} = T^a \vec{\phi}_{\text{vac}}, \quad (11.42)$$

ist. Der Vektor $\xi^{(a)}$ beschreibt Änderungen im dem Vakuum Feld $\vec{\phi}_{\text{vac}}$ nach eine Symmetrietransformation mit dem Generator $T^{(a)}$. Falls das Vakuumfeld unter diese Transformation invariant ist, ist $\xi^a = 0$ und wir erhalten keine zusätzliche Informationen aus Gl. (11.41). Allerdings, falls die Transformation

das Vakuumsfeld ändert, ist $\vec{\xi}^a \neq 0$. Dann, erfahren wir aus Gl. (11.41) das $\vec{\xi}_a$ für solches a -Index der Eigenvektor der Mass-Matrix mit einem Eigenwert Null ist. Die Zahl solche Eigenvektoren ist gleich zu der Zahl von Symmetrietransformationen welche das Vakuumsfeld ändern. Dann, können wir sagen, dass in dieser Theorie nach der Symmetriebrechung n masselose Teilchen gibt wobei n gleich die Zahl von Symmetrien (Generatoren) ist, welche das Vakuumsfeld $\vec{\phi}_{\text{vac}}$ ändern, d.h. $T^a \vec{\phi}_{\text{vac}} \neq 0$. Diese Aussage heißt Goldstone-Theorem und die masselose skalare Teilchen nennen wir Nambu-Goldstone Bosonen.

Als Beispiel, wiederholen wir die Diskussion der Theorie mit drei Felder, Gl. (11.15). Wir wählen das Vakuumsfeld aus

$$\vec{\phi}_{\text{vac}} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.43)$$

Die Lagrangedichte in Gl. (11.15) ist symmetrisch unter Drehungen im Feldraum. Es gibt drei unabhängige Drehungen, um drei Axen; zwei solche Drehungen ändern das Vakuumsfeld in Gl. (11.43) und eine Drehung nicht. Goldstone-Theorem zur Folge, sollen wir dann in dieser Theorie zwei masselose Teilchen und ein massives Teilchen haben. Das ist genau was wir auch im Rahmen expliziter Berechnung gesehen haben.